TANGIRAJUĆE SFERE GREGORIJA I NJUTNA

Problem pakovanja sfera, poznat kao Gregori-Njutnov problem ili problem tangentnih sfera, odnosi se na broj jednakih sfera koje se dodiruju. O ovom pitanju dosta su diskutovali Dejvid Gregori (David Gregory) i Isak Njutn (Isaac Newton) 1694. godine i otuda naziv problema. Pomenuti problem i njima slični problemi privukli su pažnju velikog broja čuvenih matematičara kao što su Dirihle, Gaus, Ermit, Lagranž, Minkovski kao i mnogi matematičari današnje epohe.

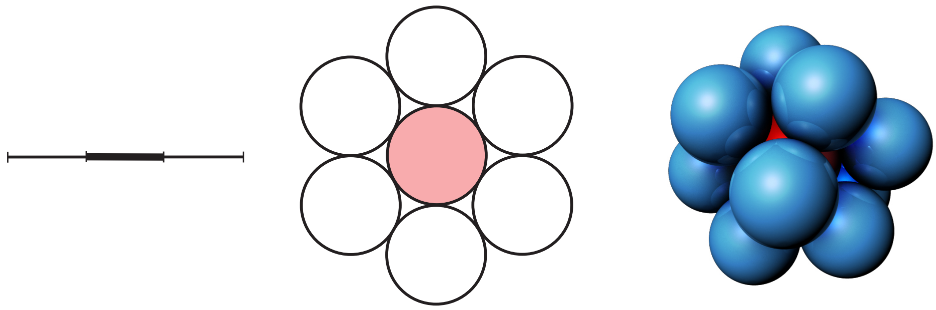
Oksfordska diskusija Dejvida Gregorija i Isaka Njutna o tangentnim sferama

Dejvid Gregori bio je nećak mnogo čuvenijeg matematičara Džemsa Gregorija (James Gregory, 1638–1675). Postao je profesor matematike u svojoj 24. godini na Univerzitetu u Edinburgu gde je predavao Njutnove teorije. Dejvid Gregori je jako podržavao Njutna u istorijskoj raspravi između Njutna i Lajbnica oko prioriteta u otkriću integralnog i diferencijalnog računa. S druge strane, Njutn je mnogo pomogao Dejvidu Gregoriju da ostvari uspešnu karijeru.

Problem tangentnih sfera proizašao je kao rezultat čuvene diskusije u Oksfordu između Dejvida Gregorija i Isaka Njutna 1694. godine:

★ *Koliko najviše jediničnih sfera može istovremeno dodirivati datu sferu iste veličine?*

Njutn je smatrao da je maksimalan broj 12 sfera, dok je Gregori verovao da je tačan odgovor 13. Međutim, nijedan nije imao dokaz za svoje tvrđenje tako da su njihovi odgovori bili samo nagađanja. Čija intuicija je bila bolja, saznalo se 250 godina kasnije. Zahvaljujući njihovoj diskusiji pomenuti problem se u literaturi često naziva Gregori-Njutnovim problemom.



Tangentne sfere u n-dimenzionalnom prostoru, © V. Petković

Neka $\kappa(n)$ označava maksimalan broj n-dimenzionalnih sfera koje dodiruju datu sferu u n-dimenzionalnom prostoru, pri čemu su sve sfere jednake veličine. Tada je, očigledno, $\kappa(1) = 2$ i $\kappa(2) = 6$, kao što je prikazano na slici.

U trodimenzionalnom prostoru moguće je rasporediti 12 sfera tako da dodiruju datu sferu; na primer, dodirujuće sfere mogu se rasporediti u temenima pravilnog ikosaedra (ikosaedar je pravilni poliedar čije su strane jednakostranični trouglovi (ukupno 20) i ima 12 temena i 30 ivica) što se može videti na slici. Dejvid Gregori i mnogi drugi autori posle njega su smatrali da ova konfiguracija (kao i neke druge konfiguracije) ostavlja „dosta prostora" za trinaestu sferu. Dakle, $\kappa(3) = 12$, ili $\kappa(3) = 13$, šta je ispravan odgovor?

Više od 250 godina ovaj problem je ostao nerešen, mada je bilo dato nekoliko „rešenja" u literaturi koja razmatraju probleme u fizici. Konačno, problem su definitivno rešili Kurt Šitle i Bartel L. van der Varden 1953. godine.

Ne više od 12 *jediničnih sfera može se istovremeno rasporediti na takav način da svaka dodiruje datu sferu iste veličine.*

Drugim rečima, $\kappa(3) = 12$. Ovo znači da je Njutn dao tačan odgovor, mada bez dokaza.

Tri godine posle Šitlea i van der Vardena, Džon Lič je dao jednostavno rešenje, razumljivo relativno širokom krugu čitalaca; dovoljno je poznavanje nekih osnovnih elemenata iz sferne geometrije i Teorije grafova. Međutim, njegov dokaz je sadžao neke sitne nekorektnosti, koje su kasnije drugi autori ispravili.

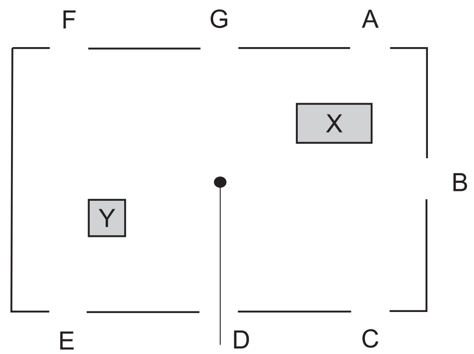
Da li je moguće naći $\kappa(n)$ za neko $n > 3$ u n-dimenzionalnom prostoru. Prilično je iznenađujuće da je problem tangentnih sfera rešen za vrlo visoke dimenzije 8 i 24; nađeno je $\kappa(8) = 240$ i $\kappa(24) = 196\,560$ (Endru Odlisko, Nejl Sloun i Vladimir Levenštajn, svi 1979.) ali je problem dugo ostao otvoren za dimenziju 4. Konačno, ruski matematičar Oleg Musin (koji živi u Los Anđelesu) pokazao je 2004. godine da je najveći broj tangentnih sfera za dimenziju $n = 4$ jednak 24.

ZADACI ZA REŠAVANJE

Z-3 • KAMELEONI NA OSTRVU. Na jednom ostrvu živi tačno 2016 kameleona, među kojima ima plavih, zelenih i crvenih. Ako se sretnu dva kameleona različitih boja, oni istovremeno promene boju i oba postaju iste boje, one treće (na primer, ako se sretnu plavi i zeleni, oba postaju crveni). Jednog dana na ostrvu je bilo 1000 plavih, 600 crvenih i 416 zelenih kameleona. Može li se desiti da posle izvesnog vremena svi kameleoni budu iste boje?

Z-4 • UBISTVO U PARKU. Ova detektivska zagonetka pripada čuvenom britanskom sastavljaču zanimljivih matematičko-logičkih zadataka, zagonetki i rebusa Henriju Dudeniju (1857–1930) koju je on nazvao *Ravensdene Park.*

Kasno naveče, ubrzo posle obilne snežne padavine, gospodin Hestings je ušao u Rejvensdin Park na kapiju D (sl. 1) i, dok je prolazio kroz park, ubijen je nožem na mestu označenom crnom tačkom. Njegovo telo je pronađeno sledećeg jutra, zajedno sa nekoliko tragova u snegu. Policija je odmah zatvorila park.



Sl. 1 Ubistvo u parku

Posle detaljnog istraživanja, policija je zaključila da je svaki trag bio napravljen različitim cipelama koje se nosile četiri osobe, ne računajući ubijenog Hestingsa. Dakle, ubica je mogao biti samo jedan od njih. Ispitujući njihove tragove na osnovu šara na cipelama, policija je zaključila sledeće:

- batler – koji je imao čvrst alibi da je bio je u kući X u vreme ubistva, a do nje je došao ušavši u park na kapiju E.

- Čuvar igrališta – koji je imao sumnjiv alibi – ušao je na kapiju A i otišao do svoje kućice Y.

- Lokalna skitnica ušao je u park na kapiju G a izašao na kapiju B.

- Prodavačica iz obližnjeg dragstora ušla je na kapiju C i izašla na kapiju F.

Utvrđeno je da su ove osobe prošle kroz park samo jednom. S obzirom da je bila i magla dok je padao sneg, putanje svih osoba bile su prilično krivudave. Policija je takođe utvrdila da putanje ne seku jedna drugu. Međutim, policija je načinila veliki propust jer nije napravila nacrt tih putanja i one su nestale posle naglog otopljenja istog dana.

Budite detektiv, ispravite propuste policije i odgonetnite ko je ubica.

REŠENJA ZADATAKA IZ PRETHODNOG SAJT-IZDANJA

Z-1 • **BROJ GODINA DECE.** Dva poznanika, koja se dugo nisu videla, razgovaraju o svojim porodicama.

– *Koliko imaš dece?*

– *Troje, sve tri ćerke.*

– *Koliko imaju godina?*

– *Proizvod njihovih godina je* 36, *a zbir godina jednak je broju one kuće.*

– *Nisi mi dovoljno rekao.*

– *Najstarija ćerka svira klavir.*

– *Aha, sada znam.*

Koliko godina ima svaka devojčica?

Zadatak je postavio čuveni matematičar Džordž Polja na prijemnom ispitu za upis na prestižni univerzitet u Stenfordu (SAD) šezdestih godina dvadesetog veka.

REŠENJE: Broj 36 može se rastaviti na tri činioca na osam načina:

$$\begin{array}{ll}
36 = 1 \cdot 1 \cdot 36, & 1 + 1 + 36 = 38 \\
36 = 1 \cdot 2 \cdot 18, & 1 + 2 + 18 = 21 \\
36 = 1 \cdot 3 \cdot 12, & 1 + 3 + 12 = 16 \\
36 = 1 \cdot 4 \cdot 9, & 1 + 4 + 9 = 14 \\
36 = 1 \cdot 6 \cdot 6, & 1 + 6 + 6 = 13 \\
36 = 2 \cdot 2 \cdot 9, & 2 + 2 + 9 = 13 \\
36 = 2 \cdot 3 \cdot 6, & 2 + 3 + 6 = 11 \\
36 = 3 \cdot 3 \cdot 4, & 3 + 3 + 4 = 10.
\end{array}$$

U drugoj koloni dati su zbirovi činilaca. Kako je sagovornik znao zbir godina (jer je video broj kuće), očigledno je da je do dileme moglo doći samo u slučaju kada su činioci 1, 6, 6 i 2, 2, 9 jer se zbir 13 javlja u oba slučaja. Činjenica da najstarija ćerka svira klavir odbacuje kombinaciju 1, 6, 6. Prema tome, dve devojčice imaju po dve godine, a treća ima devet godina.

Z-2 • CENTAR GRAVITACIJE LIMENKE PIVA. Pijete pivo iz konzerve (limenke). Kada je konzerva puna, centar gravitacije (težište) konzerve i piva zajedno biće u centru konzerve. Kada počnete da pijete pivo, centar garavitacije se pomera prema dole ali pošto se konzerva isprazni centar gravitacije prazne konzerve je opet u centru. U kojoj tački (visina konzerve) centar gravitacije je postigao minimalnu poziciju?

REŠENJE: Težište će biti na minimumu kada se površina piva poklopi sa centrom gravitacije. Tačna pozicija ovog minimuma se može izračunati ako se znaju veličina limenke i težine prazne limenke i piva.

Kao i u praksi, neka je limenka pravi cilindar visine h. Neka je w_1 težina prazne limenke a w_2 težina tečnosti – u ovom slučaju piva. Posmatrajmo limenku sa pivom kao jedinstven objekat. Tada je njegov centar gravitacije (skraćeno CG u nastavku) na visini

$$\frac{w_1 \cdot h/2 + w_2 \cdot h/2}{w_1 + w_2} = \frac{h}{2}$$

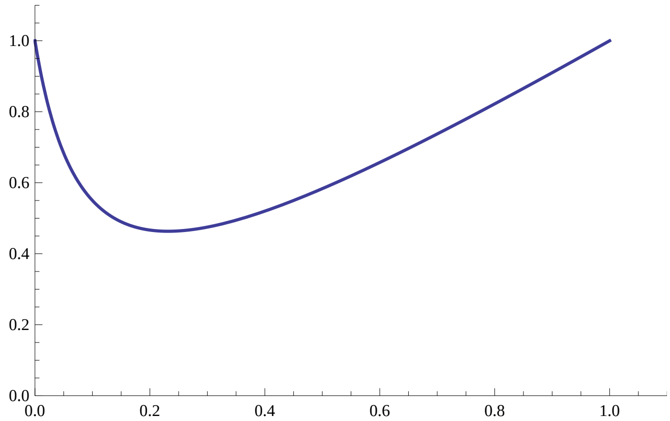
pre početka ispijanja, što je i intuitivno jasno.

Pretpostavimo sada da je popijena količina piva težine $t \cdot w_2$, gde je $t \in [0, 1]$. Novi CG je na visini

$$f(t) := \frac{w_1 \cdot h/2 + (tw_2) \cdot (th/2)}{w_1 + tw_2} = \frac{1 + kt^2}{1 + kt} \cdot \frac{h}{2} = g(t) \cdot \frac{h}{2}, \tag{1}$$

gde je $k = w_2/w_1$ i $g(t) = \dfrac{1 + kt^2}{1 + kt}$ nova funkcija. Za proizvoljno $k > 0$ je očigledno $g(t) < 1$ na intervalu $(0, 1)$, što znači da je CG uvek ispod polovine visine limenke izuzimajući početnu situaciju.

Da bismo rešili postavljen zadatak, potrebno je odrediti t^* iz intervala $[0, 1]$ za koje funkcija $g(t)$ dostiže minimum. Tipičan grafik, nacrtan za $k = 10$, prikazan je na donjoj slici.



Minimum funkcije $g(t)$ najjednostavnije je odrediti korišćenjem diferencijalnog računa, ali mi ćemo primeniti elementarnu matematiku. Pre svega, primetimo da je $g(0) = g(1) = 1$ i da je $0 < g(t) \leq 1$ $(t \in [0,1])$, što je evidentno i sa gornjeg grafika. Na osnovu ovih činjenica jasno je da mora postojati tačka (t^*, m) takva da je

$$g(t) = \frac{1+kt^2}{1+kt} \geq m = g(t^*), \tag{2}$$

gde smo sa m (< 1) označili minimalnu vrednost funkcije g na intervalu $[0,1]$.

Iz (2) dobijamo kvadratnu nejednačinu po t

$$P(t) := kt^2 - mkt + 1 - m \geq 0. \tag{3}$$

Kako je $P(0) = 1 - m > 0$ i $P(1) = (1-m)(k+1) > 0$, da bi na intervalu $[0,1]$ važila nejednakost (3) (tj. da grafik kvadratnog polinoma $P(t)$ bude iznad t-ose, eventualno da je dodiruje u jednoj tački) potrebno je i dovoljno da za diskriminantnu $D = m^2k^2 + 4k(m-1)$ kvadratne jednačine $kt^2 - mkt + 1 - m = 0$ važi $D \leq 0$. Jednakost $D = 0$ odgovara situaciji kada grafik polinoma P dodiruje t-osu, što podrazumeva jednakost u (2), na osnovu čega i određujemo traženu minimalnu vrednost m. Pozitivan koren kvadratne jednačine $D \equiv m^2k^2 + 4k(m-1) = 0$ po m jednak je $m = 2/\big(1+\sqrt{1+k}\big)$. Na osnovu ovog, iz jednačine

$$\frac{1+kt^2}{1+kt} = \frac{2}{1+\sqrt{1+k}} \quad (= m),$$

koja se dobija stavljajući znak jednakosti u (2), nalazimo vrednost argumenta t^* koja minimizira $g(t)$:

$$t^* = \frac{1}{1+\sqrt{1+k}}.$$

Iz (1) dobijamo traženu minimalnu visinu CG:

$$f(t^*) = m \cdot \frac{h}{2} = \frac{2}{1+\sqrt{1+k}} \cdot \frac{h}{2}.$$

Odavde vidimo da što je odnos k težine piva i težine limenke veći, to je visina minimalnog CG niža (i, naravno, ispod polovine $h/2$.) Na primer, za $k = 10$ dobija se $t^* = 0.231662$ i $g(t^*) = 0.463325$ (što se može videti sa prikazanog grafika), odakle je $m \approx 0.232 \cdot h/2$.

U tabeli je data minimalna visina CG za različite vrednosti odnosa težina piva i prazne limenke k, uzimajući jediničnu visinu limenke $h = 1$.

k	0	1	2	3	4	5	10	15	20
m	0.5	0.414	0.366	0.333	0.309	0.290	0.232	0.2	0.179

MATEMATIČKI HUMOR

• Norbert Viner (1894–1964) je bio jedan od najistaknutijih naučnika dvadestog veka koji je čitav svoj radni vek proveo na čuvenom Masačusetskom institutu za tehnologiju (MIT) u Kembridžu, SAD. Osim svojih vrhunskih naučnih dostignuća u mnogim oblastima, bio je veoma poznat po svojoj rasejanosti. Evo jedne od anegdota.

Norbert Viner je sa porodicom trebalo da se preseli u novu kuću u istom gradu. Ali ne samo što on lično nije učestvovao u selidbi, već je njegova žena, znajući dobro njegovu rasejanost, preduzela korake da mu da napismeno instrukcije kako da dođe do nove kuće. Uprkos tome, te večeri Viner se sa posla vratio na staru adresu. Tamo više nije bilo nikoga a on je ustanovio da se ne seća nove adrese. Takođe se prisetio da je ceduljicu s novom adresom tokom dana upotrebio da nešto zapiše a zatim je bacio. Stojeći tako bespomoćno na ulici i ne znajući šta da radi, primetio je devojku, koja mu je išla u susret, pa ju je zapitao:

„Izvini devojko, da li možda znaš gde su se preselili Vinerovi?"

Stigao je odgovor: *„Da, tata. Mama je pretpostavila da ćes verovatno biti ovde, pa me je poslala da te dovedem kući."*

Viner je osporio tačnost poslednjeg dela ove priče, odlučno tvrdeći da je on uvek bio u stanju da prepozna svu svoju decu.

• Programer, matematičar, fizičar i inženjer putuju vozom kroz Škotsku i vide kroz prozor jednu crnu ovcu.

„Pazi," kaže inženjer, *Ovce u Škotskoj su crne."*

„Hmm," kaže fizičar, *„Hteo si da kažeš da su neke škotske ovce crne."*

„Ne," kaže matematičar, *„Sve što znamo to je da postoji bar jedna ovca u Škotskoj koja je bar s jedne strane crna!"*

„A, ne!" viče programer, *„Verovatno je to bag!"*

• Najlepši trenutak u životu matematičara je onaj kratak period od momenta kada je dokazao teoremu do momenta kada pronađe grešku.