LOJDOVA SLAGALICA „15”

Lojdova „slagalica-15” ima 15 kvadrata (pločica) i jedno prazno mesto na ploči dimenzija 4×4. Ove pločice su smeštene u kutiji tako da se ne mogu vaditi ali se mogu pomerati horizontalno i vertikalno. Na početku, kvadrati sadrže brojeve redom od 1 do 13, zatim 15 pa 14, videti sliku 1. Zadatak se sastoji u tome da se kvadrati pomeraju gore, dole, desno i levo, koristeći prazan kvadrat, sve dok se brojevi ne postave u strogo rastućem poretku $1, 2, \ldots, 14, 15$. Priča se da je Sem Lojd (1841–1911), čuveni američki sastavljač šahovskih problema i zanimljivih matematičkih zagonetki i zadataka, ponudio 1000 dolara za tačno rešenje (danas bi to bilo oko 26 000 dolara). Kako rešiti ovu slagalicu?

Sl. 1 Lojdova slagalica sa 15 brojeva

Na početku da kažemo da Sem Lojd nije izmislio ovu slagalicu, on ju je samo promovisao 1891. godine i to veoma uspešno. Pravi pronalazač bio je Nojiz Čepmen, poštanski službenik iz gradića Kanastota, država Njujork, koji je za slagalicu podneo i zahtev za patent 1880. (patent nije odobren iz nepoznatih razloga). Koliko je Lojd bio dobar promoter govori činjenica da je već više od 100 godina u celom svetu ova slagalica poznata kao Lojdov izum, dok za Čepmena skoro da niko nije ni čuo, što je velika nepravda.

Interesantna je priča o Lojdovom pokušaju da patentira ovu slagalicu. Kada ga je službenik Patentnog ureda zamolio da demonstrira rešenje, Lojd je odgovorio da to nije moguće (naravno, reč je o početnoj poziciji 15-14 koja se nalazila u kutijama). *„Naš zavod prihvata patente samo onih stvari koje rade, ovde to nije slučaj,”* odgovorio je službenik i odbio zahtev za patentom. Slagalica se i dan-danas može nabaviti u radnjama sa igračkama i to u raznim varijantama (često i kao slagalica-mozaik umesto brojeva). Postoji i verzija 3×3 koju su (zaštićenu patentom) na tržište „lansirali” Stiven Hanson, Hauard Morison i Daglas Montegju 1982. godine.

U slučaju Lojdove slagalice postoje početne pozicije za koje je moguće rešiti slagalicu, dok za druge početne pozicije to nije moguće i to u odnosu otprilike pola-pola. Ova činjenica je veoma impresionirala matematičare tokom decenija, i oni su se dali na posao da matematičkim putem odrede kada je slagalicu moguće rešiti, a kada ne.

Pre nego što damo uslove pod kojima je moguće rešiti slagalicu-15, napomenimo da se uređen par elementa $\{p_i, p_j\}$ naziva *inverzijom* u permutaciji p ako je $i > j$ i $p_i < p_j$. Na primer, permutacija $a_6a_5a_7a_3a_8$ sadži četiri inverzije a_7a_3, a_5a_3, a_6a_3, a_6a_5. Ukupan broj inverzija $I(p)$ u permutaciji dobija se kao suma elemenata vektora permutacionih inverzija. Broj inverzija u permutaciji je jednak broju razmena susednih elemenata neophodnih za dobijanje njihovog prirodnog uređenja. Primetimo da u slagalici bilo koje dimenzije $m \times n$ koja ima jedan prazan kvadrat, svako pomeranje jedne pločice menja broj inverzija u permutaciji za dva; paran broj ostaje paran a neparan ostaje neparan.

U slučaju Lojdove slagalice-15 neka je $i \in \{1, 15\}$ redni broj kvadata slagalice računajući počev od prvog elementa prve vrste i idući s leva na desno, vrstu po vrstu. Ako je broj i veći od n_i brojeva koji se javljaju posle broja i, kažemo da je red njegove inverzije jednak n_i. Ukupan broj inverzija jednak je

$$I(p) = \sum_{i=1}^{15} n_i = \sum_{i=2}^{15} n_i,$$

pri čemu se sabiranje može vršiti od 2 do 15 jer je uvek $n_1 = 0$ zato što ne postoje prirodni brojevi manji od 1.

Da bismo ovo pojasnili, posmatrajmo sledeći primer početne pozicije u slagalici-15 predstavljene preko matrice 4×4, slika 2 levo:

13	10	11	6
5	7	4	8
1	12	14	9
3	15	2	

12	9	9	5
4	4	3	3
0	3	3	2
1	1	0	

Sl. 2 Inverzije kod Lojdove slagalice 15

Sabirajući brojeva upisane u polja na slici 2 desno nalazimo da je ukupan broj inverzija $I(p) = 59$.

Matematičari su brzo došli do uslova za rešivost slagalice 15:

Ako je ukupan broj inverzija $I(p)$ koji se odnosi na početnu poziciju paran, rešenje slagalice-15 postoji; ako je ovaj broj neparan, rešenje ne postoji.

Na osnovu ovog uslova rešivosti sledi da je poslednji primer slagalice nerešiv jer je ukupan broj inverzija 59 neparan broj. U slučaju Lojdove zagonetke sa zamenjenim mestima brojevima 14 i 15 imamo da je $n_{14} = 1$ dok su svi ostali $n_i = 0$. Prema tome, $I(p) = 1$, dakle neparan broj, tako da se iz početne pozicije koju je zadao Lojd postavljanje brojeva u rastući niz od 1 do 15 ne može postići.

Nemački matematičar V. Arens opisao je atmosferu u Evropi nastalu posle pojave Lojdove slagalice:

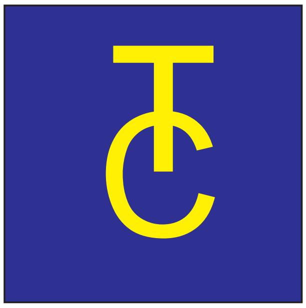
„Krajem devetnaestog veka slagalica „petnaest" pojavila se u SAD i vrlo brzo se proširila zahvaljujući ogromnom broju igrača koje je osvojila izazvavši velike nevolje. Ista stvar se desila i u Evropi. U kancelarijama i prodavnicama poslodavci su bili užasnuti ponašanjem

zaposlenih koji su igrali igru za vreme radnog vremena i školskih časova. Čak su se i ozbiljni i vremešni poslanici za vreme zasedanja Nemačkog Rajhstaga (parlamenta) zabavljali ovom slagalicom. Vlasnici radnji su zaboravljali da ujutru otvore svoje radnje, vozovi su kasnili, brodovi su udarali u dokove, uvažena gospoda su u kasnim večernjim satima ispod uličnih lampi rešavala slagalicu. Na ulicima su se prolaznici sudarali obuzeti premeštanjem pločica, igralo se po parkovima i tramvajima. (Da podsetimo, nešto slično se desilo i sto godina kasnije sa Rubikovom kockom i igrom „Tetris”). *Iz Pariza igra se brzo proširila iz glavnog grada na sve provincije. Jedan francuski novinar je pisao da je skoro svaka seoska kuća u provinciji imala ovu slagalicu i čitava domaćinsva su zaboravljala (ili odlagala) poljoprivredne radove da bi rešavali slagalicu.”*

Razlog za ovu histeriju je lako objasniti; igra je dovoljno jednostavna tako da je mogao da je igra svako, želja za uspehom bila je ogromna (u to vreme nudile su se i nagrade za uspešno rešenje), a histerija je predugo trajala jer slagalica sa početnom pozicijom nije mogla da se složi kako je zahtevano.

Interesantno je napomenuti da je čuveni šahista i bivši svetski prvak Bobi Fišer bio ekspert za rešavanje ove zagonetke-igračke; on je bio u stanju da reši slagalicu za manje od 30 sekundi iz bilo koje rešive početne pozicije.

Opet da pomenemo Sema Lojda. U svojoj karijeri on je sastavio više hiljada zanimljivih matematičkih problema, zagonetki, rebusa i šahovskih problema i na tom polju nema premca u svetu za sva vremena. Ako rebuse smatramo nekom vrstom logičkih problema, evo jednog rebusa koji je u svoje vreme zadao velike muke rešavačima. Mala pomoć: treba znati neke činjenice iz istorije Bostona i razmišljati na engleskom jeziku (kao i Lojd). Rešenje je dato na kraju ovog sajt-priloga.



ZADACI ZA REŠAVANJE

Z-19 • ISTINE I LAŽI. Matematičar koji se bavi Logikom, zvaćemo ga logičar, došao je na ostvro na kome žive tri plemena. Njemu je poznato da ljudi iz jednog plemena uvek govore istinu (istinozborci), iz drugog uvek lažu (lažovi), dok odgovori pripadnika trećeg plemena imaju slučajan karakter: ponekad lažu, a ponekad govore istinu – nazovimo ih vrdalamama. Svako pleme ima svoja specifična obeležja; jedni su dugokosi, drugi vrlo kratko podšišani, a treći nose na glavama venac od cveća. Svi stanovnici ostrva znaju ko govori istinu, ko uvek laže a ko je vrdalama, ali logičaru to nije poznato.

Jednog dana logičar je prilikom šetnje sreo trojicu stanovnika ostrva koji su, sudeći po frizurama, pripadali različitim plemenima. Na koji način logičar može da utvrdi „ko je ko” među njima postavljajući samo tri pitanja? Svako pitanje može biti postavljeno bilo kom od trojice ljudi i treba da je tako formulisano da odgovor na njega bude kratak: „**da**” ili „**ne**.”

Z-20 • CRVENI KVADRAT. Obaveštajna služba alijanse druida (OSAD) želi da pošalje važnu poruku napisanu nevidljivim mastilom. Podsetimo da su druidi su bili sveštenici-vračevi starih Kelta u Galiji, Britaniji i Irskoj. Tekst poruke postaje vidljiv ako se papir prelije „dekoderskim” rastvorom soka od eukaliptusa, kokosovog mleka i viskija starog bar 15 godina. Poruka je napisana na beloj strani papira kvadratnog oblika ivice 3 cm, čija je druga strana obojena u crveno. Da bi zbunio protivnika, OSAD je došao na oštroumnu ideju da poruku proturi kao crvenu papirnu kockicu univerzalne namene. Naime, OSAD je, koristeći sečenje i savijanje papira sa porukom, napravio kocku ivice 1 cm čije su sve spoljne strane obojene u crveno. Pri ovome se moralo voditi računa o dodatnom ograničenju: dužina svih sečenja nije smela da pređe 4 cm jer u protivnom dekoderski rastvor ne bi delovao. Kako je OSAD napravio crvenu kocku?

REŠENJA ZADATAKA IZ PRETHODNOG SAJT-IZDANJA

Z-17 • UMETNUTE CIFRE. Od 27 cifara formiran je niz u kome se nalaze tačno po tri od svake cifre od 1 do 9. Cifre su raspoređene tako da se između svake dve uzastopne cifre k $(1 \leq k \leq 9)$ nalazi tačno k drugih cifara. Odrediti bar jedan niz sa ovakvom osobinom.

REŠENJE: Postoji šest rešenja od kojih navodimo tri osnovna:

1 9 1 2 1 8 2 4 6 2 7 9 4 5 8 6 3 4 7 5 3 9 6 8 3 5 7

1 8 1 9 1 5 2 6 7 2 8 5 2 9 6 4 7 5 3 8 4 6 3 9 7 4 3

1 9 1 6 1 8 2 5 7 2 6 9 2 5 8 4 7 6 3 5 4 9 3 8 7 4 3

Preostala tri rešenja su zapravo nizovi koji se dobijaju uzimanjem gornjih nizova u obratnom redu (s desna na levo). Nalaženje rešenja ulepšaće vam dan – pa, ceo dan. Veštom programeru možda sat ili dva.

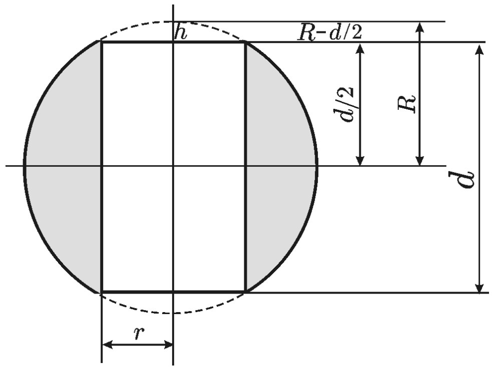
Z-18 • OTVOR U LOPTI. U asteroid Armagedon II (Armagedon I je asteroid koji se pojavljuje u istoimenom filmu (1998) i preti da uništi Zemlju – ali tu je srećom Brus Vilis da to spreči.) koji ima oblik idealne lopte udario je meteor i kroz centar asteroida napravio cilindrični otvor dužine $d = 100$ metara. Izračunati zapreminu preostalog dela asteroida.

REŠENJE: Neka je R poluprečnik asteroida sfernog oblika. Tada je poluprečnik cilindričnog otvora jednak $r = \sqrt{R^2 - (d/2)^2}$, dok visina odsečka lopte iznosi $h = R - d/2$ (sl. 3). Da bismo odredili zapreminu V preostalog dela lopte, potrebno je od zapremine lopte $V_s = 4\pi R^3/3$ oduzeti zapreminu cilindra

$$V_c = \pi r^2 d = \pi d\big(R^2 - (d/2)^2\big)$$

i dvostruku zapreminu loptinog odsečka

$$V_{od} = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2) = \frac{\pi}{6}\Big(R - \frac{d}{2}\Big)\Big[3\Big(R^2 - \Big(\frac{d}{2}\Big)^2\Big) + \Big(R - \frac{d}{2}\Big)^2\Big].$$



Sl. 3 Zapremina probušenog sferičnog asteroida

Dobijamo

$$V = V_s - V_c - 2V_{od} = \frac{4\pi}{3}R^3 - \pi d R^2 + \frac{\pi d^3}{4} - \pi\Big(\frac{4R^3}{3} - dR^2 + \frac{d^3}{12}\Big),$$

što posle sređivanja daje

$$V = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi 100^3}{6} \approx 523\,598\,\mathrm{m}^3.$$

Dakle, rezultat ne zavisi od poluprečnika lopte već samo od dužine cilindričnog otvora d ($< 2R$).

MATEMATIČKE ZANIMLJIVOSTI

• Jedan problem, postavljen u devetnaestom veku, sastojao se u nalaženju dva pozitivna racionalna broja čiji je zbir kubova jednak 6. Veliki francuski matematičar Adrien Mari Ležandr (1752–1833) dao je „dokaz nemogućnosti" takve reprezentacije. Međutim, nekoliko decenija kasnije, čuveni britanski sastavljač matematičkih zagonetki Henri Dudeni oborio je njegov dokaz i dao vrlo jednostavno rešenje:

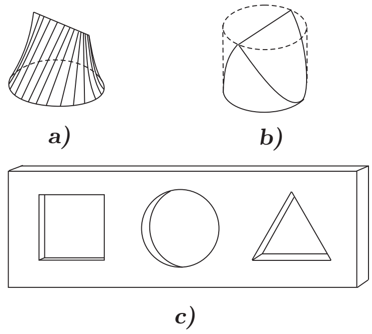
$$6 = \Big(\frac{17}{21}\Big)^3 + \Big(\frac{37}{21}\Big)^3.$$

Primetimo da je problem koji je rešavao Ležandr bio 'dečja igra' za Dudenija u poređenju sa sličnom reprezentacijom dva pozitivna racionalna broja čija suma kubova iznosi 9, a da pritom to nije par $(1, 2)$. On je pronašao da razlomci

$$\frac{415\,280\,564\,497}{348\,671\,682\,660} \quad \text{i} \quad \frac{676\,702\,467\,503}{348\,671\,682\,660}$$

zadovoljavaju traženi uslov. Njegovo rešenje zaslužuje iskreno divljenje ako se uzme u obzir da nije posedovao nikakvu računsku mašinu. Inače, celi brojevi 1 i 2 ispunjavaju traženi uslov, tj. $1^3 + 2^3 = 9$.

• „Univerzalni” čep koji može da zapuši tri različite rupe čiji poprečni preseci imaju oblik kvadrata, trougla i kruga prikazan je na slici 4.



Sl. 4 Univerzalni čep

• Broj

100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
000000000000002569

je prost. Posle broja 1 dolaze 193 nule.

MATEMATIČKI HUMOR

• Poznati japanski matematičar Šizuo Kakutani (1911-2004) je posle Drugog svetskog rata uglavnom radio u SAD, najpre na Institutu za napredne studije u Prinstonu, a zatim na Jejl univerzitetu. Jednom prilikom, dok je držao čas na Jejlu, napisao je na tabli tekst teoreme i rekao da je dokaz očigledan. Jedan student snebivljivo je digao ruku i rekao da njemu dokaz nije očigledan. Da li bi profesor mogao da objasni? Nakon nekoliko trenutaka razmišljanja, Kakutani je shvatio da on ne može u tom trenutku da dokaže teoremu. Izvinio se i rekao da će ih obavestiti na sledećem času.

Posle časa Kakutani je otišao pravo u svoj kabinet. Radio je prilično dugo ali nije mogao da dokaže nezgodnu teoremu. Preskočio je ručak i otišao u biblioteku da pronađe poreklo teoreme. Nakon mnogo muka, našao je originalni rad u kome je teorema precizno i jezgrovito formulisana. Umesto dokaza, autor je napisao „Vežba za čitaoca.” Autor ovog rada iz 1941. bio je Kakutani.

• Dvojica beskućnika sede u baru i kukaju nad svojom sudbinom.

„Tako sam siromašan,” kaže jedan od njih.

U tom trenutku u bar ulazi Bil Gejts, osnivač i suvlasnik *Microsofta*, jedne od najvećih IT kompanija na svetu.

„Daj, razvedri se,” kaže mu drug. *„U proseku svi u ovom baru su upravo postali milijarderi.”*

- **Stopinoga**

*****

Rešenje Lojdovog rebusa: Na engleskom jeziku T i C se speluju kao 'ti' i 'si', a tako dolazimo do *tee* (čaj) i *see* (more). Kako slovo T „ulazi” u C, možemo reći *tee in see*, dakle, čaj u moru. I sad malo istorije: u znak protesta zbog poreske politike Velike Britanije (na čaj i ulje), pod čijom upravom su u 18. veku bili delovi današnjih Sjedinjenih Američkih Država, u decembru 1773. godine izbila je pobuna u bostonskoj luci i tom prilikom je sva količina čaja sa brodova izbačena u more (**tee in see**). Ovim događajem je započela Američka revolucija koja je imala za cilj oslobađanje od britanske kolonijalne uprave. Sam događaj je u istoriji ostao upamćen pod nazivom *Bostonska čajanka* (The Boston Tee Party) i to je rešenje Lojdovog rebusa.