BINARNI BROJEVI I PROBLEMI MERENJA

Klod Gaspar Baše (1581–1638) je bio francuski matematičar, filozof, teolog i pesnik. Proslavio se kao pisac klasičnih knjiga iz rekreativne matematike, a poznat je i po svom prevodu sa grčkog na latinski Diofantove *Aritmetike* (1621). Među zadacima sakupljenim u Bašeovoj knjizi *Problèms plaisants et délectables* (1612, 1624), od kojih je mnoge sastavio sam Baše, nalazi se i sledeći dobro poznat zadatak:

★ *Koliko najmanje tegova različitih težina treba izabrati da bi se pomoću njih mogao izmeriti svaki teret sa celobrojnom težinom od* 1 *do* 40 *kg?*

Baše je dao dva rešenja razlikujući dva slučaja: (i) tegovi se mogu stavljati samo na jedan tas vage; (ii) dozvoljeno je stavljanje tegova na oba tasa. Osim Bašea, u literaturi se kao autori varijante (i) često pominju Italijani Fibonači i Tartalja. Svi oni našli su da se problem (i) rešava tegovima od 1, 2, 4, 8, 16 i 32 kg. U slučaju (ii) Baše je našao da su dovoljna samo četiri tega težina 1, 3, 9 i 27 kg. Podrazumevajući da nema dodatnih zahteva u formulaciji problema, ova rešenja daju najmanji mogući broj zahtevanih tegova.

Sada ćemo objasniti kojim postupkom se dolazi do gornjih rešenja. Neka je Q prirodan broj ≤ 40 i neka su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ težine potrebnih tegova.

Varijanta (i):

Težine $t_1, t_2, \ldots, t_n$ treba da budu tako izabrane da jednakost

$$Q = a_1t_1 + a_2t_2 + \cdots + a_nt_n \tag{1}$$

važi za svako $Q = 1, 2, \ldots, 40$, podrazumevajući da koeficijent a_k ($k \in \{1, 2, \ldots, n\}$) uzima vrednost 1 ako je teg težine t_k stavljen na tas i 0 ako nije.

Predstavljanje broja Q u obliku (1) je ekvivalentno reprezentaciji brojeva u binarnom brojnom sistemu koji ima osnovu 2 i cifre 0 i 1. Zaista, ako uzmemo

$$t_1 = 2^0 = 1,\ t_2 = 2^1 = 2,\ t_3 = 2^2 = 4,\ \ldots,\ t_n = 2^{n-1},$$

dobićemo

$$Q = a_n \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 2^1 + a_1 \cdot 2^0, \tag{2}$$

gde su $a_k \in \{0, 1\}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) cifre broja. Ova vrste predstavljanja brojeva je veoma dobro poznata čitaocu. Brojevi u decimalnom brojnom sistemu (sa osnovom 10) zapisuju se u obliku

$$a_n \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^0.$$

Na primer, $(214)_{10} = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$.

Najveći broj koji se može izraziti pomoću (2) je $Q = (1\cdots111)_2$ (broj napisan u binarnom sistemu sa n jedinica), koji je jednak

$$(1\cdots111)_2 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 2^n - 1.$$

Uzimajući $n = 6$, dobijamo $(111111)_2 = 2^6 - 1 = 63 > 40$, tako da izbor 6 tegova zadovoljava uslove zadatka. Prema tome, potrebno je (i dovoljno) uzeti tegove težina 1, 2, 4, 8, 16 i 32 kg. Druga rešenja sa tegovima različitih težina ne postoje.

Varijanta (ii):

Slična ista ideja dovodi do rešenja Bašeovog problema u slučaju (ii). Predstavimo $Q \in \{1, \ldots, 40\}$ u obliku

$$Q = b_1t_1 + b_2t_2 + \cdots + b_mt_m, \tag{3}$$

gde koeficijenti $b_1, b_2, \ldots, b_m$ imaju sledeće vrednosti:

$b_k = -1$ ako se teg težine t_k stavlja na isti tas gde je i mereni teret;

$b_k = 0$ ako teg težine t_k nije stavljen ni na jedan tas;

$b_k = 1$ ako je teg težine t_k stavljen na tas na kome nije teret.

Ako vrednost $b_k = -1$ shvatimo kao „cifru" nekog brojnog sistema, reprezentacija (3) sugeriše korišćenje „brojnog sistema" sa osnovom 3. U ovom slučaju, birajući tegove sa težinama $t_1 = 3^0 = 1$ kg, $t_2 = 3^1 = 3$ kg, $t_3 = 3^2 = 9$ kg, itd., najpre vršimo konverziju prirodnog broja Q iz decimalnog sistema u „brojni sistem" sa osnovom 3, to jest,

$$Q = b_m \cdot 3^{m-1} + \cdots + b_3 \cdot 3^2 + b_2 \cdot 3^1 + b_1 \cdot 3^0 = (b_m \cdots b_3b_2b_1)_3. \tag{4}$$

Ovde je $b_k \in \{-1, 0, 1\}$ i najveći prirodni broj oblika (4) je $Q = (1\cdots111)_3$ (broj napisan sa m jedinica u brojnom sistemu sa osnovom 3), koji je jednak

$$(1\cdots111)_3 = 3^{m-1} + \cdots + 3^2 + 3^1 + 3^0 = \frac{3^m - 1}{2}.$$

Uzimajući $m = 4$, dobijamo $(1111)_3 = (3^4 - 1)/2 = 40$. Dakle, izbor tegova sa težinama 1, 3, 9 i 27 kg zadovoljava uslov zadatka.

Opisani postupak merenja u slučaju (ii) ilustrovaćemo na primeru tereta $Q = 23$ kg. Tada je

$$Q = 23 = 1 \cdot 27 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 1.$$

Na ovaj način je decimalni broj 23 transformisan na oblik (4). Na osnovu izraza na desnoj strani zaključujemo da tegove od 1 i 3 kg treba staviti na tas zajedno sa teretom, dok teg težine 27 kg stavljamo na drugi tas.

U časopisu *Quarterly Journal of Mathematics* (1886, Volume 21) engleski matematičar Mejdžor Mekmejhon odredio je sve prihvatljive skupove celobrojnih težina tegova koji mogu da mere celobrojne težine od 1 do n, pretpostavljajući da se tegovi mogu stavljati na oba tasa. Na ovaj način je Bašeov problem sa tegovima (varijanta (ii)) uopšten. Štaviše, Mekmejhon je kompletirao rešenje postavljenog problema jer Bašeovo rešenje još uvek ne znači da je ono i jedinstveno. Mekmejhon je pronašao osam rešenja:

$$\{1_{40}\}, \{1, 3_{13}\}, \{1_4, 9_4\}, \{1, 3, 9_4\}, \{1_{13}, 27\},$$
$$\{1, 3_4, 27\}, \{1_4, 9, 27\}, \{1, 3, 9, 27\}.$$

Oznaka d_k u rešenju označava da je potrebno k tegova, od kojih je svaki težak d kg. Na primer, rešenje $\{1_4, 9_4\}$ označava da su potrebna 4 tega težine od po 1 kg i 4 tega od po 9 kg. Poslednje od prikazanih rešenja $\{1, 3, 9, 27\}$ pripada Bašeu; njegovo rešenje zahteva najmanji broj tegova (četiri) i to je istovremeno jedino rešenje u kome su sve težine različite.

Kao što je demonstrirano, binarna reprezentacija u mnogim situacijama može biti vrlo korisna. Podsećamo da smo jednu primenu videli u priči o Kardanovim prstenovima i Grejovim kodovima iz sajt-izdanja #9, decembar 2018. U nastavku ćemo izložiti još jednu lepu primenu, ovog puta u Kombinatorici. U knjizi *Concrete Mathematics* (Addison Wesley, 1989) autori R. Graham, D. Knut i O. Patašnik su razmatrali sledeći terminatorski problem.

★ *n gusara, označenih brojevima od 1 do n, raspoređeni su duž kružnice. Ako se pođe od gusara 1 i eliminiše svaki drugi od preostalih gusara, odrediti broj preživelih gusara.*

Umesto jadnih gusara mogu se posmatrati i neke druge klasa nevaljalaca, ali to je toliko jasno da ne mora ni da se diskutuje. Drugim rečima, ova primedba je nepotrebna.

Određivanje broja $P(n)$ preživelih gusara nije jednostavno i može se naći u već spomenutoj knjizi *Concrete Mathematics* ili u knjizi *Famous Puzzles of Great Mathematicians* (American Mathematical Society, 2009) autora ovog sajta. Ispostavilo se da se broj $P(n)$ može veoma zgodno predstaviti koristeći binarnu reprezentaciju koja zavisi od n. Evo ovako:

Neka je binarna reprezentacija broja n data sa

$$n = (b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0)_2,$$

to jest,

$$n = b_m \cdot 2^m + b_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0.$$

Tada je

$$P(n) = (b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_1 b_0 b_m)_2.$$

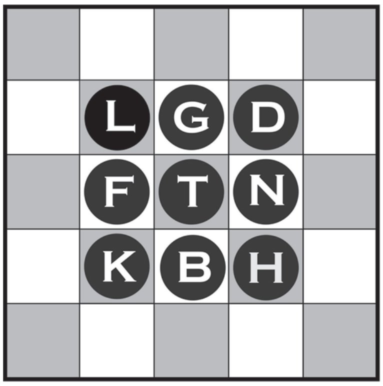
Dakle, broj $P(n)$ se dobija prebacivanjem prve cifre binarne reprezentacije broja n sa prvog na poslednje mesto. Na primer, neka je $n = 103 = (1100111)_2$, tada je

$$\begin{aligned} P(103) &= P((1100111)_2) = (1001111)_2 \\ &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 4 + 2 + 1 = 79. \end{aligned}$$

To je $\dfrac{79}{103} \cdot 100 \approx 77\%$, sto i nije toliko loše po gusare.

ZADACI ZA REŠAVANJE

Z-21 • PREDSEDNIČKI KANDIDATI. U vreme predsedničkih izbora u SAD 1908. godine veliki uspeh kod publike imala je zagonetka prikazana na slici 1. Svaka figura na ploči 5×5 predstavlja predsedničkog kandidata i to: L – Lafolet, G – Grej, D – Džonson, F – Ferbanks, T – Taft, N – Noks, K – Kenon, B – Brajen, H – Hogs.



Sl. 1 Predsednički kandidati

Potrebno je sa table udaljiti osam kandidata, ostavivši samo jednog – pobednika na centralnom polju. Potez se sastoji ili od jednog premeštanja figure na susedno polje gore, dole, levo, desno ili po dijagonalama (kao potez kralja u šahu), ili iz serije skokova jedne iste figure pri čemu se u svakom skoku preskače samo jedna figura i to u bilo kojem od pravaca: gore, dole, levo, desno ili po dijagonalama. Svaka preskočena figura odmah se skida sa table. Da li se ovaj postupak može obaviti u manje od 4 poteza?

Z-22 • PREČNIK MATERIJALNE LOPTE. Arapski naučnik Tabit ibn Kora (826–901) čuven je po svojim izvanrednim prevodima Euklidovih *Elemenata* i dela Apolonija, Arhimeda, Ptolomeja i Teodosija. Napisao je cenjene radove iz elementarne algebre, konusa i astronomije, ali se bavio i popularnom matematikom, u prvom redu magičnim kvadratima i tzv. prijateljskim brojevima. Evo jednog njegovog zadatka koji je aktuelan i u današnje vreme.

★ *Koristeći Euklidova oruđa (lenjir i šestar) naći prečnik date materijalne lopte.*

REŠENJA ZADATAKA IZ PRETHODNOG SAJT-IZDANJA

Z-19 • ISTINE I LAŽI. Matematičar koji se bavi Logikom, zvaćemo ga logičar, došao je na ostrvo na kome žive tri plemena. Njemu je poznato da ljudi iz jednog plemena uvek govore istinu (istinozborci), iz drugog uvek lažu (lažovi), dok odgovori pripadnika trećeg plemena imaju slučajan karakter: ponekad lažu, a ponekad govore istinu – nazovimo ih vrdalamama. Svako pleme ima svoja specifična obeležja; jedni su dugokosi, drugi vrlo kratko podšišani, a treći nose na glavama venac od cveća. Svi stanovnici ostrva znaju ko govori istinu, ko uvek laže a ko je vrdalama, ali logičaru to nije poznato.

Jednog dana logičar je prilikom šetnje sreo trojicu stanovnika ostrva koji su, sudeći po frizurama, pripadali različitim plemenima. Na koji način logičar može da utvrdi „ko je ko” među njima postavljajući samo tri pitanja? Svako pitanje može biti postavljeno bilo kom od trojice ljudi i treba da je tako formulisano da odgovor na njega bude kratak: „**da**” ili „**ne**.”

REŠENJE: Postoji više različitih rešenja, a mi navodimo sledeće: Nazovimo tri domoroca kratko A, B i C i neka slova I, L i V označaju redom onog ko govori istinu, ko laže i ko govori čas istinu, čas laže (u formulaciju zadatka nazvali smo ga vrdalamom). Postoje 6 različitih permutacija za I, L i V :

	1	2	3	4	5	6
A	I	I	L	L	V	V
B	L	V	V	I	I	L
C	V	L	I	V	L	I

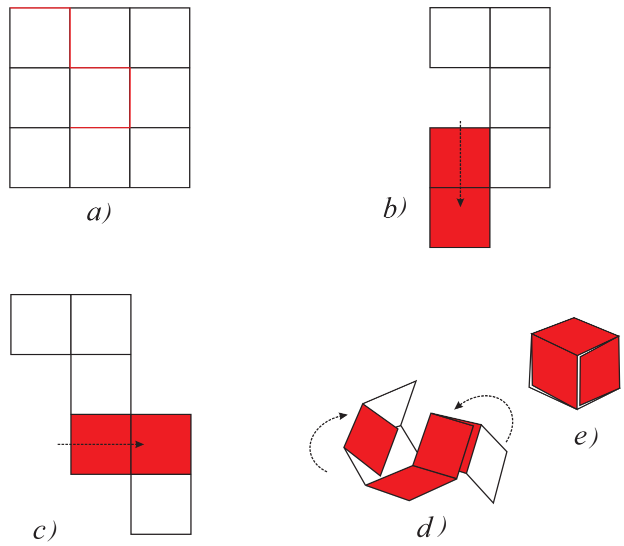
Logičar postavlja pitanje osobi A :

„Da li je verovatnije da će B pre reći istinu nego C?”

Ako B odgovori *DA*, linije 1 i 4 se eliminišu iz gornje tabele i logičar zna da C nije vrdalama. Ako je odgovor *NE*, linije 2 i 3 se eliminišu i logičar zna da B nije vrdalama. U oba slučaja logičar se okreće domorocu koji nije vrdalama i postavlja mu pitanje na koje obojica znaju odgovor (na primer, „da li sada pada kiša?” ili „da li si ti vrdalama?”). Njegov odgovor će razjasniti da li je on istinozborac ili lažov. Kada logičar sazna ovu činjenicu, on će ga dalje pitati da li je tačno da je jedan od njegova dva druga vrdalama. Njegov odgovor će otkriti identitete druga dva čoveka.

Z-20 • CRVENI KVADRAT. Obaveštajna služba alijanse druida (OSAD) želi da pošalje važnu poruku napisanu nevidljivim mastilom. Podsetimo da su druidi su bili sveštenici-vračevi starih Kelta u Galiji, Britaniji i Irskoj. Tekst poruke postaje vidljiv ako se papir prelije „dekoderskim” rastvorom soka od eukaliptusa, kokosovog mleka i viskija starog bar 15 godina. Poruka je napisana na beloj strani papira kvadratnog oblika ivice 3 cm, čija je druga strana obojena u crveno. Da bi zbunio protivnika, OSAD je došao na oštroumnu ideju da poruku proturi kao crvenu papirnu kockicu univerzalne namene. Naime, OSAD je, koristeći sečenje i savijanje papira sa porukom, napravio kocku ivice 1 cm čije su sve spoljne strane obojene u crveno. Pri ovome se moralo voditi računa o dodatnom ograničenju: dužina svih sečenja nije smela da pređe 4 cm jer u protivnom dekoderski rastvor ne bi delovao. Kako je OSAD napravio crvenu kocku?

REŠENJE: Rešenje je prikazano na slici 2 (*a*–*e*). Kvadrat od papira je najpre podeljen na 9 manjih kvadrata ivice 1 cm. Centralni kvadrat nema ulogu pri formiranju crvene kocke i on je preklopljen preko srednjeg kvadrata u prvoj vrsti.



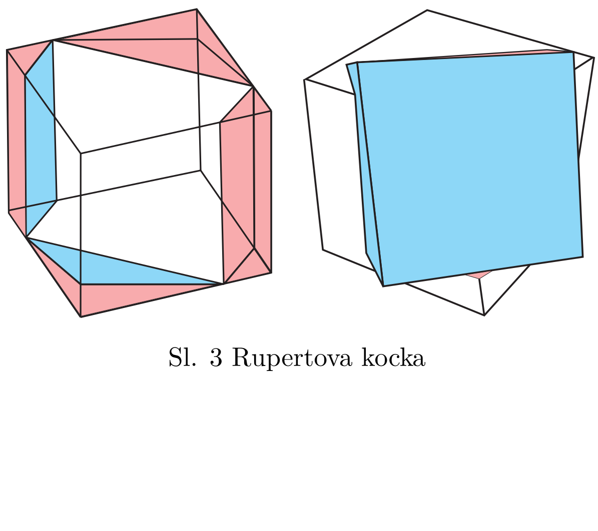
Sl. 2 Konstrukcija kocke od kvadrata

MATEMATIČKE ZANIMLJIVOSTI

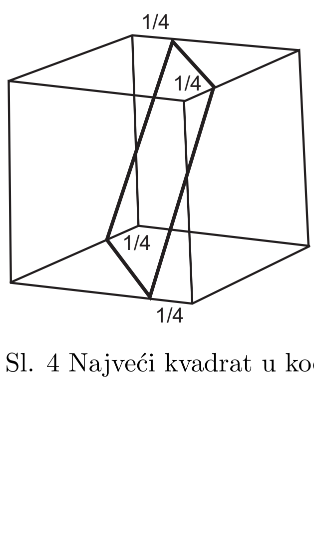
• Početkom sedamnaestog veka, princ Rupert Bavarski postavio je vrlo interesantno i izazovno pitanje: *Da li se kroz datu drvenu kocku može napraviti „tunel” kroz koji će proći veća kocka? Ako je ivica prve kocke 1, odrediti ivicu najveće kocke koja može da prođe kroz nju.* Princ Rupert je toliko bio uveren da postoji rešenje da je ponudio veliku opkladu.

Engleski matematičar Džon Volis bio je prvi koji je pokazao da je to moguće na primeru tunela čija je osa paralelna sa dijagonalom kocke. Ivica Volisove kocke imala je dužinu $\sqrt{6}-\sqrt{2} \approx 1.03527$, što je veće od 1 i Rupert je dobio opkladu.

Sto godina kasnije pokazalo se da Volisovo rešenje nije optimalno, tj. moguće je napraviti tunel pomoću veće kocke. Holandski matematičar Piter Nivland pokazao je 1793. godine da najveća kocka ima ivicu jednaku $\frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1.0606601$. Konstrukcija i položaj ove kocke, poznate pod imenom Rupertova kocka, prikazana je na slici 3.



Sl. 3 Rupertova kocka

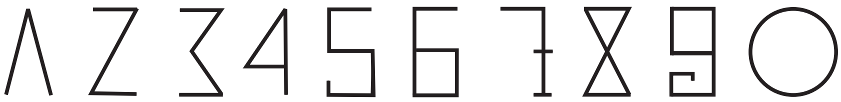


Sl. 4 Najveći kvadrat u kocki

U bliskoj vezi sa Rupertovim problemom je konstrukcija najvećeg kvadrata koji ceo leži u jediničnoj kocki. Ivica najvećeg kvadrata takođe je jednaka $\frac{3\sqrt{2}}{4} \approx 1.0606601$ i njegova konstrukcija se može videti na slici 4; potrebno je temena ovog kvadrata postaviti na razdaljini od 1/4 od odgovarajućih temena kocke. Ovaj kvadrat, „istisnut" u oba pravca ortogonalno na svoju početnu poziciju, pravi rupu kroz koju veća kocka (ivice $\frac{3\sqrt{2}}{4}$) može da prođe kroz kocku ivice 1. Delovi jedinične kocke koji ostaju posle „bušenja" tunela, formiraju dve trougaone prizme i dva nepravilna tetraedra, povezana pomoću tankih „mostova" u četiri ivice kvadrata. Od svojih šest temena, svaka prizma ima dva temena u dva susedna temena kocke i četiri temena na susednim ivicama kocke na rastojanju od 1/4 od temena kocke.

Matematička konstrukcija Rupertove kocke je jasna, ali praktična demonstracija prolaženja veće kocke kroz manju pomoću modela (recimo, od papira) je veoma teška jer su ivice obe kocke vrlo bliske po veličini. Međutim, na internetu postoje vrlo uverljive i jasne kompjuterske video simulacije ovog „poduhvata."

• Šezdesetih godina 20. veka gospođa Abdelkri Budžibar, direktorka Muzeja u Maroku, izložila je javnosti svoju interesantnu i prilično ubedljivu studiju o tome kako je nepoznati arapski matematičar mogao pre nekih hiljadu godina da oblikuje takozvane arapske brojeve, odnosno cifre od 0 do 9. Ona smatra da su cifre formirane prema kriterijumu da svaka sadrži odgovarajući broj uglova, kao što je prikazano na slici 33. Dakle, cifra broja „jedan" sadrži jedan ugao, cifra broja „dva" ima dva ugla, broja „tri" ima tri ugla, i tako dalje. Nula je, naravno, oblikovana tako da nema uglova.



Sl. 5 Cifre i broj uglova

Ovakvo jedno racionalno obrazloženje nastanka cifara bi bilo interesantno ukoliko bi se uspostavilo da je tačno. Današnji izgled cifara 1, 2, 3 mogao je nastati usled kurzivnog pisanja jedne, dve ili tri crte. Međutim, oblikovanje ostalih cifara manje je jasno.

• Holanđanin Kristijan Hajgens (Christiaan Huygens, (1629–1695)), svakako jedan od najvećih svetskih naučnika 17. veka, stekao je visoku međunarodnu reputaciju svojim radovima iz fizike, matematike i astronomije. U 16. i 17. veku naučnici su često su zapisivali svoje rezultate u obliku anagrama (anagram je nova reč ili rečenica koja se sastoji od istih slova kao originalna ali ima drugačije uređenje) izbegavajući da ih publikuju pre nego što provere sve detalje, ili da bi osigurali prioritet ili tajnost svog otkrića. Kada je otkrio Saturnove prstenove, Hajgens je saopštio svoje otkriće u knjižici u obliku anagrama:

aaaaaaa cccc d eeeee g h iiiiiii lll mm nnnnnnnnn oooo pp q rr s ttttt uuuuu

Raspoređujući slova na pravilan način, dobija se sledeći tekst:

Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato.

(Okružen tankim, ravnim prstenom bez oslonca, nagnut ka ekliptici.)

Pomenimo da se slova Hajgensovog anagrama mogu rasporediti na milion načina. Ipak, čak ni takvi anagrami nisu uvek bili dovoljni da zaštite tajnu. Hajgens je sastavio sličan anagram kada je otkrio Saturnov satelit Titan, ali je poznati engleski matematičar i teolog Džon Valis (1616–1703) uspeo da ga dešifruje.

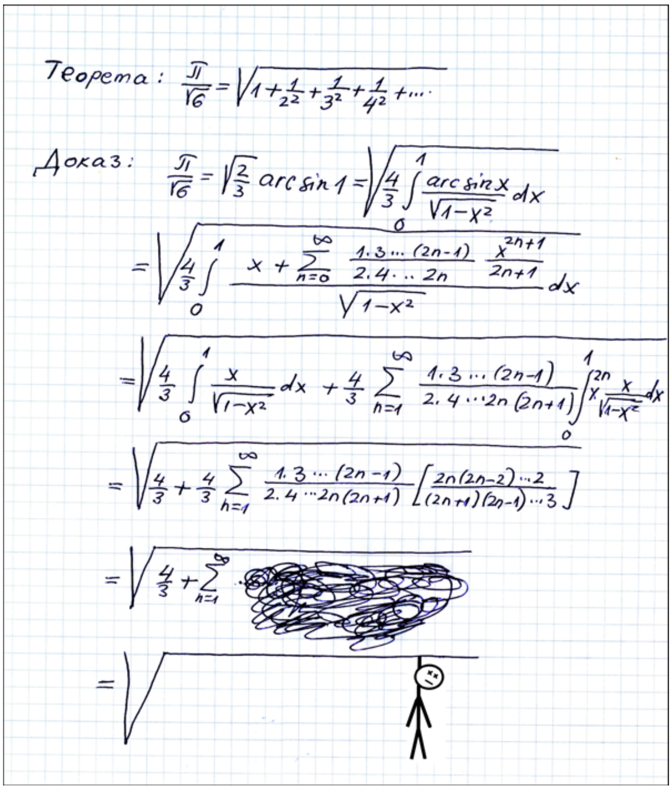
MATEMATIČKI HUMOR

• Po izlasku iz kafeterije, Norber Viner, jedan od najvećih naučnika 20. veka ali takođe i vrlo rasejan profesor, sreo je nekog svog studenta i stao da porazgovaraju. Kada je razgovor bio završen, Viner je zapitao studenta:

„Da li se možda sećaš u kom pravcu sam išao kada smo se sreli?”

Kada mu je student odgovorio, Viner je zaključio: *„Hm, to znači da sam već ručao.”*

• **Dokaz ili smrt**



• Dva čoveka voze se u balonu ali posle nekog vremena utvrđuju da su se izgubili negde u kanjonu. Jedan od njih kaže:

„Imam ideju. Vikaćemo pa će eho odneti naše glasove daleko.”

I on se nagne preko ivice korpe i poviče:

„Eheej! Gde se nalazimo?

Nekoliko puta odzvanja eho. Nakon 15 minuta, do njih dopire povratni eho: *„Eheej, vi ste se izgubili!!"*

Jedan od ljudi iz balona na to kaže:

„Ovo mora da je matematičar."

Začuđen, drugi ga pita:

„Kako znaš?

„Postoje tri razloga za to: Prvo, trebalo mu je dosta vremena da odgovori; drugo, odgovor je apsolutno tačan, i treće, odgovor je potpuno beskoristan."