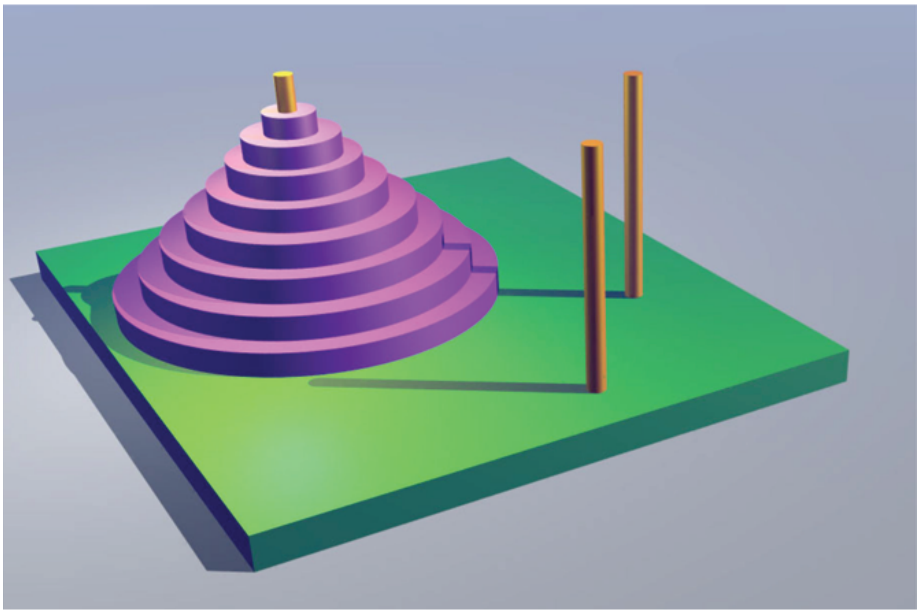
HANOJSKA KULA

Francuski matematičar Eduar Lika (Lucas, 842–1891) je danas najviše poznat po svojim rezultatima iz Teorije brojeva; on je razvio metod za testiranje prostih brojeva koji je, posle izvesnih poboljšanja koja je uradio D. H. Lemer 1930. godine, korišćen sve do današnjih dana pod imenom Lika-Lemerov test. Veliki deo svoje aktivnosti posvetio je problemima iz oblasti rekreativne matematike. Osim toga, Lika je izučavao niz definisan pomoću rekurentne relacije $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ i dao mu ime Fibonačijev niz. U ovoj priči opisaćemo *Hanojsku kulu*, veoma poznatu i popularnu matematičku zagonetku. Izumeo ju je i promovisao M. Claus 1883. godine. U stvari, kreator ove zagonetke-igračke je Eduar Lika a ime Claus je anagram (premeštaljka) prezimena Lucas.

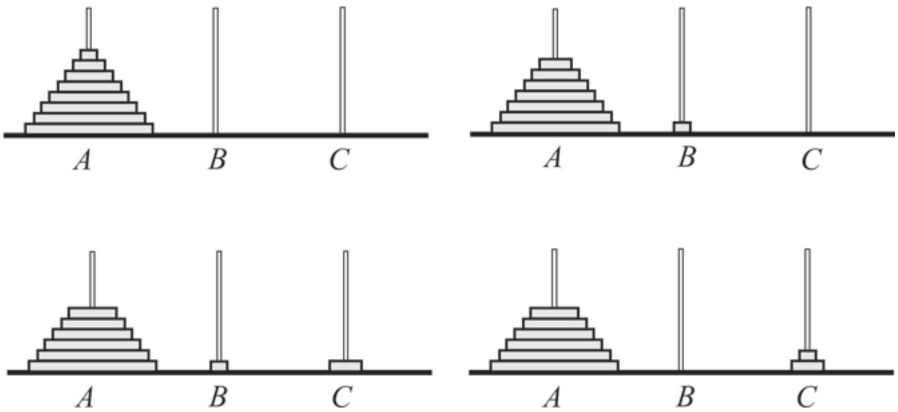


Sl. 1 Hanojska kula

Hanojska kula sastoji se od 3 vertikalna klina postavljena na ploču, i izvesnog broja diskova (8 u slučaju Likaove igračke). U početnom položaju diskovi su postavljeni tako da se manji disk uvek nalazi iznad većeg (videti sliku 1). Diskovi se mogu prebacivati (po jedan u jednom potezu) sa jednog klina na drugi na takav način da je u bilo kom trenutku na bilo kom klinu *manji disk uvek iznad većeg.* Zadatak se sastoji u tome da se svi diskovi sa kule (klin sa diskovima u početnom položaju) prebace na neki od druga dva klina. Koliki je najmanji broj poteza potreban za prebacivanje?

Sl. 2 Kula u Hanoju, © Chelsea Hicks

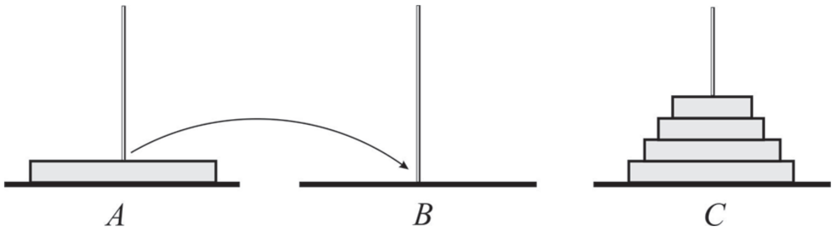
Na slici 2 prikazana je Hanojska kula sa zastavom (visoka 41 metar), sagrađena 1812. godine u Hanoju (Vijetnam), za koju se veruje da je bila inspirativna za ime Likaove zagonetke.



Sl. 3 Hanojska kula – prvi potezi

Označimo traženi minimalan broj poteza sa h_n (h je izabrano zbog „Hanoj"). Očigledno da je $h_1 = 1$ i $h_2 = 3$. Prva 3 poteza prikazana su na slici 3. Za premeštanje najvećeg diska sa klina A na klin B, moramo prethodno napraviti kulu od preostalih $n-1$ diskova na klinu C, koristeći u ovom procesu klin B (videti sliku 4). Minimalan broj poteza neophodan za ovo premeštanje je h_{n-1}. Posle toga, 1 potez je dovoljan za prebacivanje najvećeg diska na klin B i najmanje h_{n-1} poteza za razmeštaj $n-1$ diskova sa klina C na klin B (koristeći klin A). Odatle, traženi broj dat je rekurentnom relacijom

$$h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 2, \quad h_1 = 1. \tag{1}$$



Sl. 4

Za $n,\ n-1,\dots,3,\ 2$ relacija (1) daje

$$\begin{aligned}
h_n &= 2h_{n-1}+1\\
h_{n-1} &= 2h_{n-2}+1\\
h_{n-2} &= 2h_{n-3}+1\\
&\ \ \vdots\\
h_3 &= 2h_2+1\\
h_2 &= 2h_1+1.
\end{aligned}$$

Množeći gornje relacije redom sa $1,\ 2,\ 2^2,\dots,2^{n-2}$, i sabirajući levu i desnu stranu pomnoženih relacija (tzv. „teleskopski" metod), dobijamo

$$h_n = 1+2+2^2+\cdots 2^{n-2}+2^{n-1} = 2^n-1.$$

Prema tome, 2^n-1 je minimalni broj poteza potreban za premeštanje n diskova. U slučaju Likaove igračke iz 1883. (sa $n=8$ diskova) ovaj broj je $2^8-1=255$.

Godinu dana pošto je Lika kreirao svoju zagonetku-igračku, De Parvij je u *La Nauture* (1884, str. 285–286) napisao interesantnu priču o „poreklu" *Hanojskih kula* i ona otprilike glasi ovako:.

„Bog je pri stvaranju sveta postavio u jednom hramu u indijskom svetom gradu Benaresu Hanojsku kulu sa 64 *zlatna diska, a kaluđeri su istog trenutka počeli da premeštaju diskove prema pravilima koja su gore opisana. Prema legendi, završetak premeštanja značiće i kraj sveta, koji će u istom trenutku isčeznuti uz strašnu grmljavinu i haos."*

Na osnovu gore izvedene opšte formule, broj prebacivanja zlatnih diskova u hramu u Benaresu je

$$2^{64}-1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Pretpostavljajući da sveštenici mogu da prebacuju jedan disk u sekundi bez ikakvog odmora, kraj sveta bi se desio za otprilike 585 milijardi godina!

Minimalan broj od 2^n-1 poteza može se naći u mnogim radovima i knjigama, bez neke dublje analize. Međutim, D. Vud (Wood) u svom radu iz 1981. kaže:

„Ono što se obično dokazuje je da minimalan broj poteza potreban za rekurzivni postupak iznosi 2^n-1. *Ovo ne mora da znači da ne postoje postupci drugog tipa koji bi mogli da reše problem Hanojskih kula u manje poteza."*

U nastavku svog rada, Vud dokazuje da je $2^n - 1$ zaista minimalan broj, nezavisno od primenjenog postupka premeštanja. Dve značajne posledice ovog tvrđenja su:

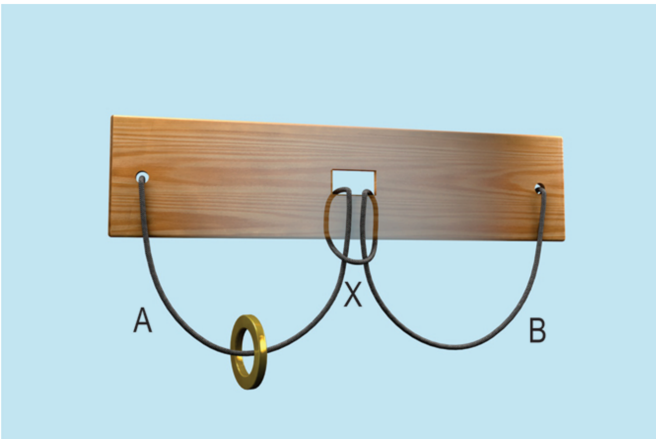
1) Tipično rekurzivno rešenje (prikazano gore) za Hanojsku kulu je optimalno u smislu minimalnog broja poteza.

2) Hanojska kula je problem eksponencijalnog tipa; naime, vreme potrebno za rešavanje raste eksponencijalno sa porastom broja diskova.

Vudov rad takođe sadrži analizu rešenja sa stanovišta računarske kompleksnosti, transfer-program napisan u programskom jeziku Pascal, neke otvorene i nove probleme koji su u vezi sa Hanojskom kulom i, konačno, vrlo obimnu literaturu o razmatranoj temi.

ZADACI ZA REŠAVANJE

Z-15 • PROVLAČENJE PRSTENA. U osnovi mehaničkih zagonetki sa koncem i kolutovima (prstenovima) često leži topološka teorija čvorova. Jedna od najefektnijih zagonetki tog tipa prikazana je na slici 5. Prsten iz petlje A treba prebaciti u petlju B ne odvezujući i ne kidajući konac. Centralni otvor je takvih dimenzija da kroz njega ne može proći prsten.



Sl. 5 Provlačenje prstena kroz petlju

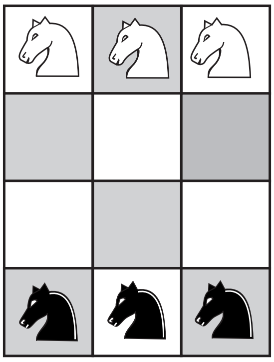
Z-16 • PROBLEM ANAMARIJA. Poznati problem „Anamarija" čuvenog američkog sastavljača šahovskih i matematičkih problema i zagonetki različitog tipa Sema Lojda stavljao je, kažu, čak i univerzitetske profesore na muke iako je za njegovo rešavanje dovoljno znanje iz osnovne škole. Ovaj matematičko-lingvistički problem glasi ovako:

★ *Ana i Marija imaju zajedno 44 godine. Marija je dva puta toliko stara koliko je Ana bila kada je Marija bila upola toliko stara koliko će Ana biti kada Ana bude tri puta toliko stara koliko je Marija bila kada je Marija bila tri puta toliko stara koliko je tada bila Ana.*

Po koliko godina imaju Ana i Marija?

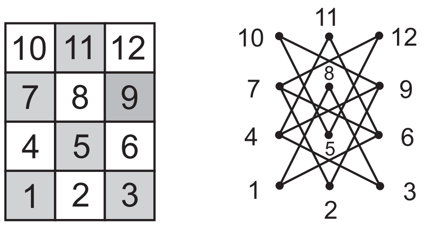
REŠENJA ZADATAKA IZ PRETHODNOG SAJT-IZDANJA

Z-13 • RAZMENA ŠEST SKAKAČA. Data je mini šahovska tabla 4×3 sa 6 skakača. Zadatak se sastoji u tome da beli i crni skakači međusobno zamene mesta u minimalnom broju poteza. Naizmeničnost poteza belog i crnog nije neophodna. One koji su zaboravili da igraju šah podsećamo da se skakač kreće „na Γ", tj. dva polja pravo, a onda jedno polje u stranu pod $90°$ levo, desno, gore ili dole.

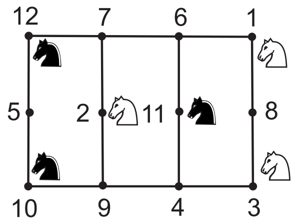


Razmena belih i crnih skakača

REŠENJE: Označimo polja šahovske table 4×3 brojevima od 1 do 12 kao na slici 6 levo. Zatim povežimo svaka dva polja „skakačevim skokom", kao na slici 6 desno. Ova zamršena mreža spojnica je ustvari ravanski graf koji se, uz malo muke, može „rasplesti" u jednostavnu ekvivalentnu mrežu (graf) prikazan na slici 7.



Sl. 6 Graf razmene skakača



Sl. 7 Ekvivalentan graf

Uprošćeni graf sa slike 7 omogućuje da se do rešenja znatno lakše dođe. Razmena belih i crnih skakača u minimalnom broju poteza (16) ide ovim redom:

1-6-7, 11-6-1, 3-4-11, 10-9-4-3, 2-9-10, 7-6, 12-7-2, 6-7-12

Z-14 • UMETNUTI KORENI. Čuveni indijski matematičar Srinivasa Ramanuđan (1887–1920) postavio je 1911. sledeći zadatak: Izračunati vrednost izraza

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}\,.$$

REŠENJE: Evo jednog od rešenja. Pođimo od očiglednog identiteta

$$x^2 = 1 + (x^2 - 1), \quad \text{tj.,} \quad x^2 = 1 + (x-1)(x+1).$$

Odavde je

$$x = \sqrt{1 + (x-1)(x+1)}.$$

Sukcesivnom primenom ovog identiteta za $x+1, x+2, \ldots$ dobija se

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{1 + (x-1)(x+1)} = \sqrt{1 + (x-1)\sqrt{1 + x(x+2)}} \\ &= \sqrt{1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + \sqrt{1 + (x+1)(x+3)}}}} \\ &\vdots \\ &= \sqrt{1 + (x-1)\sqrt{1 + x\sqrt{1 + \sqrt{1 + (x+1)\sqrt{1 + \cdots}}}}}\,. \end{aligned}$$

Uzimajući $x = 3$ nalazimo vrednost traženog izraza

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}} = 3.$$

Interesantno je da niko od čitalaca *Časopisa indijskog matematičkog društva*, u kome je ovaj elementarni zadatak objavljen, nije dao rešenje Ramanuđanovog zadatka ni posle 6 meseci od pojavljivanja teksta zadatka 1911, te je on bio „primoran” da izloži rešenje, i usput dâ nekoliko generalizacija, na primer

$$x + n + a = \sqrt{ax + (n+a)^2 + x\sqrt{a(x+n) + (n+a)^2 + (x+n)\sqrt{\cdots}}}\,.$$

Postavljeni zadatak se dobija kao specijalan slučaj uzimajući $x = 2,\ n = 1,\ a = 0$.

MATEMATIČKE ZANIMLJIVOSTI

- Za Đavolski ili Satanski broj 666 važe sledeće interesantne jednakosti:

$\mathbf{666} = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$

(zbir kvadrata prvih 7 prostih brojeva);

$\mathbf{666} = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$;

$\mathbf{666} = 1^6 - 2^6 + 3^6$;

$\mathbf{666}^2 = (6 \cdot 6 \cdot 6)^2 + (666 - 6 \cdot 6)^2$

(Pitagorina trojka (216,630,666) zapisana pomoću šestica);

$\mathbf{666} = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9$

(Ubacivanje znaka „+” u niz 123456789 daje 666).

Američki predsednik Ronald Regan promenio je svoju adresu u Kaliforniji da bi izbegao „đavolski broj” 666. Inače, ako se broje slova u njegovom imenu Ronald Wilson Reagan dobija se broj 666, a od toga Regan nije mogao da izvrda.

• U matematici „gledaj-i-reci” (*engl.* look-and-say) niz je beskonačan niz prirodnih brojeva koji počinje sa

$$1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211, \ldots .$$

Da bi se generisao sledeći član niza potrebno je „pročitati” cifre predhodnog člana brojeći broj cifara u grupama sa istom cifrom. Na primer:

1 se čita kao „jedna cifra 1” ili 11.

11 se čita kao „dve cifre 1” ili 21.

21 se čita kao „jedna cifra 2, zatim jedna cifra 1”, ili 1211.

1211 se čita kao „jedna cifra 1, jedna cifra 2, zatim dve cifre 1”, ili 111221.

111221 se čita kao „tri cifre 1, dve cifre 2, zatim jedna 1” ili 312211.

Gledaj-i-reci niz je uveo i analizirao čuveni matematičar Džon Konvej (r. 1937.) u radu objavljenom u časopisu *Eureka* 1986. Niz je monotono rastući. Konvej je u teoremi koju je nazvao *Kosmološka teorema* povezao svoj niz sa elementima periodnog sistema uređenih prema njihovim atomskim brojevima. Interesantno je da se kao cifre članova ovog niza javljaju samo brojevi 1, 2 i 3. Konvejev niz je našao svoju primenu u Teoriji kodiranja.

Dodajmo da se Konvejev niz javlja kao zagonetka pod nazivom *Kukavičje jaje* koja glasi: *Koji je sledeći član u nizu* 1, 11, 21, 1211, 111221?

MATEMATIČKI HUMOR

• Čuveni nemački matematičar David Hilbert, profesor Univerziteta u Getingenu, bio je veoma strog i bezosećajan čovek, često čak nepristojno grub.

Jednom je Norbert Viner sa Masačusetskog univerziteta za tehnologiju (čuveni MIT), kao mlad i još neafirmisan, držao predavanje u Matematičkom klubu u Getingenu. Nakon sastanka grupa je otišla na uobičajeni zajednički ručak. Za vreme ručka Hilbert je komentarisao predavanja koja je imao prilike da čuje u Getingenu. Po njegovom mišljenju, kvalitet je bio sve lošiji, a posebno loša su bila u poslednjoj godini.

„Osim ovog koje smo čuli danas popodne,” započeo je. I dok se Viner pripremao za kompliment, Hilbert je nastavio, *„današnje predavanje je bilo najgore koje smo ikada čuli.”*

Napomenimo da je kasnije Norbert Viner postigao vrhunske rezultate u više naučnih disciplina i smatra se jednim od najvećih naučnika 20. veka.

• Lekar na nekoj klinici pokušava da praktično primeni svoje znanje iz statistike. Nakon što je pregledao pacijenta, lekar mu kaže:

„Vi ste vrlo ozbiljno bolesni. Sa stanovišta statistike, devet od deset pacijenata koji boluju od ove bolesti, umire."

Prirodno, pacijent postaje veoma uzrujan ali ga doktor umiruje rečima:

„Ali, ne plašite se! Do sada je devet mojih pacijenata koji su patili od ove bolesti, već umrlo. Prema tome, razvedrite se. Vi ste moj deseti pacijent i, prema statistici, vi ćete se oporaviti!"

• Ako je $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$, čemu je jednako

$$R=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-z)?$$

Odgovor: $R=0$, jer je 24. faktor $(x-x)$.