EGIPATSKI RAZLOMCI

Pod *Egipatskim razlomkom* se podrazumeva *jedinični* razlomak, dakle razlomak oblika $\frac{1}{n}$, gde je n prirodan broj. Ne zna se zašto, ali su stari Egipćani voleli da predstavljaju razlomke preko sume jediničnih razlomaka, na primer,

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} \quad \text{ili} \quad \frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}.$$

Najstariji izvor u kome se mogu naći Egipatski razlomci je Rindov papirus koji se čuva se u Britanskom muzeju u Londonu. Datira iz vremena oko 1650. godine p. n. e., a kupio ga je Englez Aleksander Rind u Luksoru (Egipat) 1858. godine, pa je po njemu rukopis i nazvan.

Interesantno pitanje je *da li se bilo koji razlomak manji od* 1 *može predstaviti kao suma različitih Egipatskih razlomaka?* Odgovor je potvrdan i traženu konstrukciju demonstrirao je čuveni Leonardo iz Pize, zvani Fibonači, još 1202. Mnogo godina kasnije, ovaj algoritam je ponovo otkrio čuveni britanski matematičar Silvester (videti Hofmanovu knjigu *The Man Who Loved Only Numbers* (Hyperion, 2000)). Fibonačijev postupak je algoritamskog tipa i uvek daje rezultat, mada ne uvek najjednostavniji. Ilustrovaćemo ga na primeru razlomka 6/7.

- Naći najveći jedinični razlomak koji je jednak ili manji od $\frac{6}{7}$. To je $\frac{1}{2}$.
- Naći razliku $\frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$.
- Naći najveći jedinični razlomak koji je jednak ili manji od $\frac{5}{14}$. To je $\frac{1}{3}$.
- Naći razliku $\frac{5}{14} - \frac{1}{3} = \frac{1}{42}$.
- Naći najveći jedinični razlomak različit od $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ koji je jednak ili manji od $\frac{1}{42}$. To je upravo $\frac{1}{42}$ i ovde se postupak završava.

Na ovaj način smo dobili

$$\frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}.$$

Kao što je već napomenuto, Fibonačijev algoritam ne daje uvek najjednostavniju „egipatsku" reprezentaciju. Na primer, primenjen na razlomak $\frac{5}{121}$ ovaj algoritam daje

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763\,309} + \frac{1}{873\,960\,180\,913} + \frac{1}{1\,527\,612\,795\,642\,093\,418\,846\,225}$$

što je znatno složenije nego jednostavan odgovor

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}.$$

Razvijeno je još desetak algoritama za „egipatsku” reprezentaciju razlomaka, ali nijedan ne daje garantovano najjednostavniji oblik.

Lako je izraziti 1 kao sumu različitih Egipatskih razlomaka; minimalno rešenje je razvoj $1 = 1/2 + 1/3 + 1/6$. Međutim, razvoj 1 po različitim jediničnim razlomcima sa svim neparnim imeniocima predstavlja težak problem koji je uz pomoć računara rešio 1971. japanski programer S. Jamašita. Postoji pet rešenja ovog problema, pokazanih dole, svako sa devet sabiraka:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{33}+\frac{1}{45}+\frac{1}{385}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{231}+\frac{1}{315}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{165}+\frac{1}{693}\\
&= \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{135}+\frac{1}{10395}.
\end{aligned}$$

Možda se ne zna zašto su stari Egipćani voleli „razbijanje” jednog celog na delove, ali se u jednom slučaju ispostavilo da to ima smisla u paleontologiji. U traganju za fosilnim ostacima pračoveka na ostrvu Java u Indoneziji 40-tih godina prošlog veka, čuveni nemački paleontolog Gustav H. R. fon Kenigsvald je ponudio lokalnim stanovnicima po 10 centi za svaku kost pračoveka koju pronađu i donesu mu. Ubrzo je na svoje zaprepašćenje uvideo da su oni sa mnogo žara razbijalni krupne komade kosti u manje da bi dobili što više novca. Da vam to možda ne daje ideju da svoj skupoceni automobil prodajete deo po deo?

Kada se govori o predstavljanju razlomaka preko Egipatskih razlomaka, nezaobilazna je tzv. *Erdeš-Štrausova hipoteza* po kojoj se svaki razlomak oblika $4/n$ može predstaviti kao suma od tri Egipatska razlomka:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Koristeći računar, potvrđeno je da ova hipoteza važi za svako $n < 10^{14}$. Kontraprimer nije pronađen, ali to ne znači da je hipoteza dokazana jer od 10^{14} do beskonačnosti ima mnogo, mnogo, **mnooogo** da se ide, pa i kada stignete, ima još, i jooš, i joooš...

Gde se mogu primeniti Egipatski razlomci? Evo jednog praktičnog primera: *Kako podeliti* 5 *pica na* 8 *jednakih delova?* Prema „egipatskoj” reprezentaciji

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

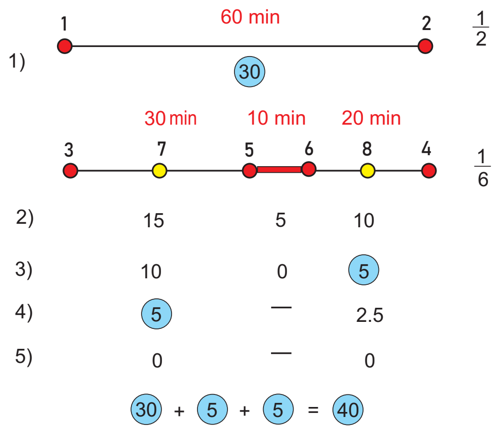
vidimo da svaka od 8 osoba treba da dobije pola pice i $1/8$ pice, što je najlakše učiniti tako što se 4 pice podele na 8 polovina, a peta pica na 8 jednakih delova.

Drugi primer: *Kako podeliti tri pogače između pet osoba tako da svi dobiju podjednako?* Podela je ilustrovana na slici 1.

Sl. 1 Podela tri pogače

I na kraju još jedan primer. U literaturi je dobro poznat zadatak o tajmer-konopcima. Radi se o merenju vremena pomoću konopaca koji, zapaljeni na krajevima, gore sve dok sasvim ne sagore. Sastav konopaca je nehomogen tako da brzina gorenja ne zavisi od dužine konopca, ali je poznato da je linerano proporcionalna broju tačaka paljenja (tzv. frontovi paljenja) na konopcu. Takođe je poznato da svaki konopac, zapaljen na jednom kraju, izgori za jedan sat. Rešenje ovog problema tesno je povezano sa Egipatskim razlomcima, kao što je ilustrovano na sledećem primeru.

Pretpostavimo da treba izmeriti 40 minuta (2/3 jednog sata). Koristeći Egipatske razlomke imamo da je $2/3 = 1/2 + 1/6$. Postupak paljenja je podeljen u nekoliko faza, kao što je prikazano na slici 2, pri čemu koristimo dva konopca koja, zapaljena na jednom kraju, izgore za jedan sat. Najpre palimo jedan konopac na oba kraja (tačke 1 i 2 na slici 2; broj frontova paljenja je 2 (faza 1)). Ovaj konopac će izgoreti za 1/2 sata. Posle njegovog sagorevanja, odmah palimo drugi konopac na krajevima (tačke 3 i 4) i još u dve tačke (5 i 6) između krajeva drugog konopca (faza 2)). Na taj način dobijaju se tri segmenta koja gore. Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da će jedan od tih segmenata prvi izgoreti (opštost se ne umanjuje ako dva ili sva tri sagore za isto vreme). Simulacije radi i jasnijeg prikaza rešenja, na slici su data i vremena sagorevanja sva tri segmenta u minutima (u crvenoj boji). Segment konopca koji najbrže gori sagoreće za 5 minuta; to je segment 5–6. Posle ovoga palimo prvi (3–5) i treći segment (6–4) u proizvoljnim tačkama (obeleženim sa 7 i 8) (faza 3)). Na ovaj način imamo 6 frontova paljenja i drugi konopac će, saglasno uslovima zadatka, sagoreti za 60/6=10 minuta. Zajedno sa 30 minuta potrebnih za sagorevanje prvog konopca to čini 40 minuta. Napomenimo da će u 4. fazi segment (6–4) sagoreti za 2.5 minuta, dok segment (3–5) još gori i sagoraće za 5 minuta, čime se proces merenja završava.

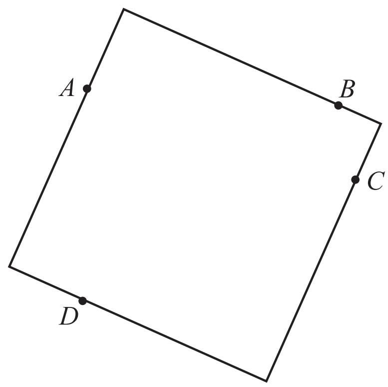


Sl. 2 Tajmer-konopci i Egipatski razlomci

NAGRADNI ZADATAK

U sajt-izdanju # 13 postavljen je sledeći nagradni zadatak:

NZ-1 U pustinjskom predelu jedne države prebogate naftom treba sagraditi aerodrom. Ekipa geometara je izašla na teren i označila teren kvadratnog oblika pomoću osam štapova sa zastavicama. Svako teme ove ogromene kvadratne parcele označeno je štapom sa crvenom zastavicom, a radi boljeg pregleda na svakoj od stranica kvadrata zaboden je u pesak po jedan štap sa plavom zastavicom. Ekipa je uradila ovo početno obeležavanje a zatim se povukla sa terena jer je počela snažna pustinjska oluja. Posle tri dana geometri su se vratili na teren gde ih je čekalo neprijatno iznanenđenje: vetar je isčupao sva četiri štapa koja su označavala temena kvadrata. Za utehu, ostala su četiri štapa sa plavim zastavicama za koje se zna da leže na stranicama kvadrata – budućeg aerodroma, videti sliku 3. Srećom, među geometrima se našao jedan „geo-matičar” koji se još sećao osnova geometrije iz srednje škole. Posle uzimanja koordinata plavih štapova A, B, C i D, on je na parčetu papira u odgovarajućoj proporciji odredio položaj sva četiri temena i konstruisao traženi kvadrat. Kako je to on uradio?



Sl. 3 Izgubljeni kvadrat

Na imejl adresu autora sajta stiglo je samo 8 odgovora, 6 is Srbije i 2 iz SAD-a. Nije čudno da su se javili i posetioci iz SAD-a (verovatno studenti ili zaposleni iz naših krajeva) jer oni čine 15% od ukupnog broja korisnika sajta. Moguće da je broj zainteresovanih bio mali ili je zadatak bio pretežak, ili i jedno i drugo.

Napomenimo da se radi o dosta poznatom zadatku koji je u stranoj literaturi poznat pod imenom *problem ubica* ili *problem mrtvačkog kovčega* (Problem of dead man's chest). Gornju formulaciju zadatka dao je autor sajta, ali se zadatak može naći u različitim varijantama, pa i u onim koje imaju veze sa pomenutim pomalo morbidnim naslovima. Inače, problem nema nikakve veze sa filmskim hitom *Pirates of the Caribbean: Dead Man's Chest* iz 2006.

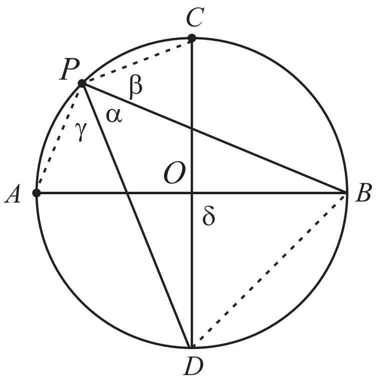
Od prispelih rešenja jedino potpuno tačno rešenje poslao je Goran Petrović iz San Hozea (grad od 600 000 stanovnika u Kaliforniji, jedan od centara IT industrije u Silicijumskoj dolini). Nažalost, osim adrese, nagrađeni učesnik nije poslao druge podatke. Vredna knjiga iz istorije matematike biće mu uručena posredno putem internet kompanija tipa Amazon.com, Barnes & Noble ili Books A Million koje se bave online prodajom knjiga.

Rešenje nagradnog zadatka:

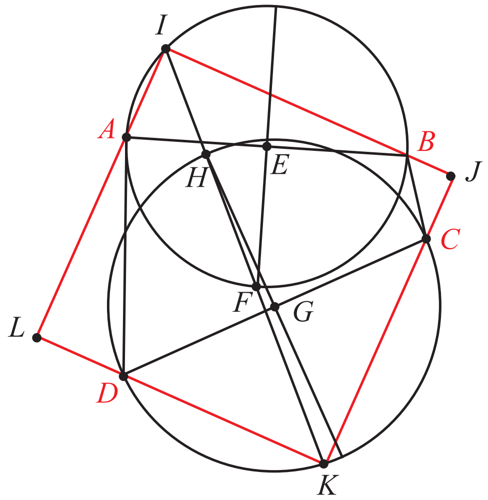
Postoji više rešenje a ovde će biti prikazano jedno zasnovano na sledećoj teoremi koja se lako dokazuje na osnovu slike 4.

Uglovi α, β i γ u temenu P koje leži na kružnici, obrazovani pomoću dva međusobno ortogonalna prečnika i dve tetive, jednaki su $45°$.

Neka su AB i CD međusobno normalni prečnici. Lako je primetiti da je ugao $\alpha = \delta/2 = 90°/2 = 45°$ kao periferijski ugao nad centralnim uglom $\delta = 90°$. Kako su uglovi $\measuredangle APB$ i $\measuredangle CPD$ pravi kao uglovi nad prečnikom kruga, sledi $\beta = \gamma = 45°$.



Sl. 4



Sl. 5 Izgubljeni kvadrat – rešenje

Neka su A, B, C i D tačke koje leže na stranicama kvadrata koji tražimo. Posmatrajmo na slici 5 dva kruga čiji su prečnici dati dužima AB i CD. Konstruišimo prečnike EF normalno na AB i GH normalno na CD. Produžimo liniju FH do preseka sa lukom AB u tački I i lukom CD u tački K.

Konstrukciju traženog kvadrata ćemo kompletirati ako produžimo linije IB i KC do preseka u tački J, i linije IA i KD do preseka u tački L. Kako su oba ugla $\measuredangle JIK$ i $\measuredangle JKI$ trougla $\triangle IJK$ jednaki 45°, sledi da je $\measuredangle IJK = 90°$. Slično, $\measuredangle KLI = 90°$, što znači da je četvorougao $IJKL$ kvadrat koji sadrži tačke A, B, C i D na svojim stranama.

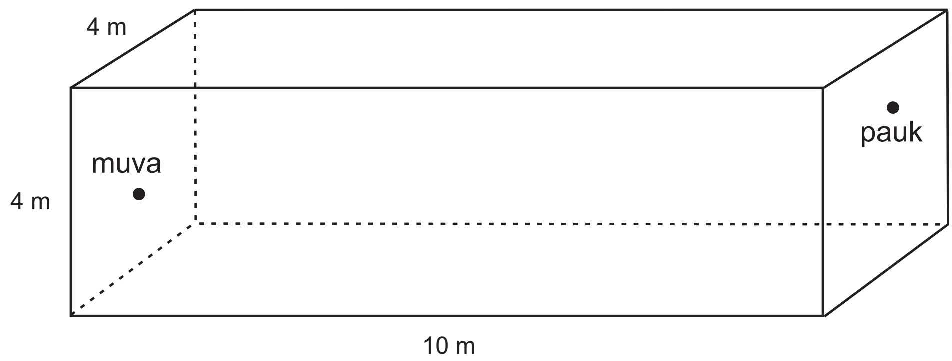
ZADACI ZA REŠAVANJE

Z-31 • ZEMLJA MIROLIJA. Sa namerom da u budućnosti ojača svoju vojsku i povede rat protiv suseda, sultan zemlje Mirolije doneo je neobičan zakon koji bi trebalo da poveća odnos broja dečaka i devojčica u Miroliji. Naime, porodice sa jednom ćerkom nisu imale pravo da dalje imaju dece, dok broj dečaka u porodici nije bio ograničen sve do eventualnog rođenja ćerke. Sultan je objašnjavao da će u zemlji postojati porodice bez devojčica ili sa najviše jednom devojčicom, na primer, sa tri dečaka i jednom devojčicom, pet dečaka i jednom devojčicom, itd.

Da li je sultan bio u pravu? Kakav je odnos broja dečaka i devojčica u zemlji Miroliji?

Z-32 • PAUK I MUVA. Jedna od najpoznatijih zagonetki čuvenog britanskog sastavljača matematičkih zadataka i zagonetki Henrija Dudenija svakako je zadatak o pauku i muvi, prvi put publikovan 1903. godine u jednom engleskom časopisu.

Soba ima oblik kvadra čije su dimenzije date na slici 6. Po sredini jedne bočne strane, na rastojanju 1/3 metra od plafona, nalazi se pauk. Po sredini suprotne bočne strane, na visini od 1/3 metra od poda, nalazi se muva. Od straha, muva se paralisala i ne može da se pomakne. Odrediti najkraći put po kome pauk može da stigne do muve.



Sl. 6 Najkraći put do muve?

REŠENJA ZADATAKA IZ PRETHODNOG SAJT-IZDANJA

Z-29 • **MAČKE I MIŠEVI.** Ako tri mačke uhvate tri miša za tri minuta, koji je najmanji broj mačaka potreban da uhvate 10 miševa za 10 minuta?

REŠENJE: Na prvi pogled, rešenje ovog veoma poznatog problema je vrlo jednostavno: Lako je videti da

(I) *tri mačke hvataju jednog miša za jedan minut,*

odakle bi se moglo zaključiti da bi te iste tri mačke mogle uhvatiti 10 miševa za 10 minuta.

Međutim, šta tvrđenje *tri mačke će uhvatiti jednog miša...* zapravo znači? Izvesno, ovde je unapred pretpostavljeno da su *sve tri mačke koncentrisane na jednog miša,* tj. da one love jednog istog miša. Tako nešto ne stoji u formulaciji zadatka, niti je takva operacija zajedničkog lova igde opisana.

Na osnovu uslova datih u zadatku sledi jedino ovaj lanac zaključaka:

(II) *svaka mačka hvata jednog miša za tri minuta;* prema tome,
tri mačke uhvate tri miša za tri minuta;

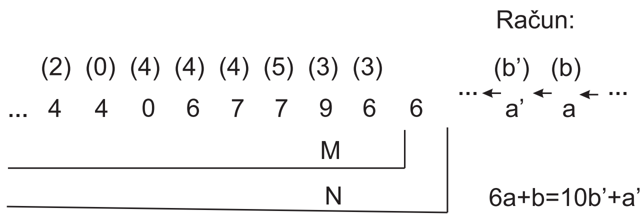
odakle sledi da

tri mačke uhvate 9 *miševa za* 9 *minuta.*

Sada se srećemo sa neočekivanom teškoćom. Koliko vremena je potrebno da tri mačke uhvate preostalog miša? Samo jedan minut, ako usvojimo pretpostavku (I), međutim to nije rečeno u formulaciji zadatka. Ako usvojimo tvrđenje (II), tada će biti potrebno 12 minuta da se uhvati 10 miševa (jedna mačka hvata preostalog miša za 3 minuta), ali ovo se opet ne slaže sa uslovima datim u postavljenom zadatku („...10 *miševa za* 10 *minuta*”). Jedino što se može tvrditi je da pitanje nije precizno postavljeno i da se na njega ne može odgovoriti bez dodatnih informacija o načinu na koji mačke love miševe.

Z-30 • **ŠESTICA U POKRETU.** Poslednja cifra prirodnog broja N je 6. Ako se ova cifra premesti na prvo mesto, dobija se šestostruko veći broj. Odrediti najmanji broj N sa ovom osobinom.

REŠENJE: Označimo originalno dat broj sa N, a sa $M = 6N$ broj koji se dobija premeštanjem cifre 6 sa poslednje na prvu poziciju. S obzirom da je 6 poslednja cifra broja N, posle množenja broja N sa 6 dobija se $6 \times 6 = 36$, dakle, poslednja cifra šestostrukog broja M je takođe 6 pri čemu 3 „prenosimo dalje” na susednu poziciju levo. Dobijene cifre broja M zapisivaćemo u drugu vrstu na slici 6, a prenesenu cifru (napisanu u zagradi) u prvu vrstu. Ponovnim množenjem sa 6 i uzimajući u obzir prenos 3 dobijamo $6 \times 3 + 3 = 39$; zapisujemo prenos (3) (prva vrsta) i novu cifru 9 (druga vrsta). Sledeće množenje daje $6 \times 9 + 3 = 57$, prenos je (5) a nova cifra 7, itd. Deo šeme množenja cifrom 6 i prenos koji se pritom javlja prikazan je na slici 7.



Sl. 7 Šema množenja cifrom 6

Postavlja se pitanje dokle treba sprovoditi opisani postupak? Primetimo da brojevi M i N imaju jednak broj cifara. S obzirom da je prva cifra broja M jednaka 6, a ovaj broj je 6 puta veći od N, očigledno sledi da prva cifra broja N mora biti 1 (u suprotnom, broj M bi imao više cifara nego N). To znači da je druga cifra broja M jednaka 1, tj. broj M je oblika $M = 61\ldots$. Cifra 1 u broju M mora biti dobijena tako da pri njenom zapisivanju prenos iznosi 0. Dakle, proces opisan šemom na slici 7 treba zaustaviti kad se u drugoj vrsti pojavi broj 1, a u prvoj vrsti broj (0) (prenos). Na taj način dobija se najmanji broj N sa traženim svojstvom. Sprovodeći gornji postupak do kraja, dobijamo broj od 57 cifara

$$N = 1\,016\,949\,152\,542\,372\,881\,355\,932\,203\,389\,830\,508\,474\,576\,271\,186\,440\,677\,966.$$

MATEMATIČKE ZANIMLJIVOSTI

• Među prirodnim brojevima postoje i brojevi koji se nazivaju *srećnim brojevima.* *Srećan broj S* je onaj koji zadovoljava sledeću osobinu: Polazi se od zbira kvadrata cifara broja S koji daje drugi broj A_2, zatim se od zbira cifara kvadrata dobijenog broja A_2 formira treći broj A_3, i tako dalje, sve dok se na kraju ne dobije broj 1. Brojevi kod kojih opisana šema ne dovodi do broja 1 zovu se *nesrećni brojevi* – proces dovodi do petlje, tj. do broja koji po ovoj šemi u nastavku opet dovodi do istog broja i ponavljanje je neizbežno.

Navodimo dva primera srećnih brojeva:

$$
\begin{array}{ll}
S = 19 & S = 469 \\
1^2 + 9^2 = 82 & 4^2 + 6^2 + 9^2 = 133 \\
8^2 + 2^2 = 68 & 1^2 + 3^2 + 3^2 = 19 \\
6^2 + 8^2 = 100 & 1^2 + 9^2 = 82 \\
1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 & 8^2 + 2^2 = 68 \\
 & 6^2 + 8^2 = 100 \\
 & 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1
\end{array}
$$

Pomenimo osobinu srećnih brojeva da se 0 ne javlja kao cifra ovih brojeva i da je svaka cifra veća ili jednaka prethodnoj cifri (neopadajući niz).

Kao primer *nesrećnog broja* navodimo broj 25 za koji gore opisana šema dovodi do petlje i nikad ne dostiže broj 1.

$$
\begin{array}{l}
2^2 + 5^2 = 29 \\
2^2 + 9^2 = 85 \\
8^2 + 5^2 = \mathbf{89} \\
8^2 + 9^2 = 145 \\
1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \\
4^2 + 2^2 = 20 \\
2^2 + 0^2 = 4 \\
4^2 = 16 \\
1^2 + 6^2 = 27 \\
3^2 + 7^2 = 58 \\
5^2 + 8^2 = \mathbf{89}
\end{array}
$$

Sprovedena šema se opet završava brojem 89 i ulazi se u beskonačnu petlju; proces se ne može završiti brojem 1.

• Akademik Igor Tam (1895–1971) bio je čuveni ruski naučnik koji je bavio teorijskom fizikom i matematičkom fizikom. Zajedno sa Pavelom Čerenkovim i Iljom Frankom dobio je Nobelovu nagradu za fiziku 1958. godine za svoj rad koji se odnosio na Čerenkovu radijaciju. (Čerenkovova radijacija je emitovanje svetlosti kada gama zraci prolaze kroz tečni medijum. Ovu pojavu otkrio je Pavel Čerenkov 1934. godine.) Godine 1953. Tam je radio u timu fizičara koju su napravili prvu sovjetsku termonuklearnu bombu. Iz svog života ispričao je uzbudljivu priču iz vremena Ruske revolucije 1917. godine.

Jednog dana Igor Tam je u vreme Ruske revolucije i velike nestašice hrane otišao u neko selo blizu Odese da potraži hranu. Dok je lutao selom, uhapsili su ga ukrajinski antikomunisti koji su ga odveli do svog vođe. Poigravajući se pištoljem, vođa je pitao Tama čime se bavi. Tam je odgovorio da je matematičar. *„Dobro, da proverimo,”* rekao je vođa, *„izračunaj grešku pri aproksimaciji funkcije Tejlorovim polinomom od n članova. Ako to uradiš tačno, bićeš oslobođen, u protivnom bićeš streljan kao špijun.”* Uplašen i nervozan Tam je uspeo da izračuna grešku i ispiše rezultat prstima u prašini. Kada je završio, vođa je bacio pogled na rezultat, klimnuo glavom i oslobodio Tama. Iako je kasnije tragao za osobom koja mu je postavila pitanje života ili smrti, Tam nikad nije uspeo da otkrije identitet antikomunističkog vođe.

Lagranžov oblik ostatka Tejlorovog polinoma $T_n(x)$

$$\begin{aligned} E(x;n,a) = f(x) - T_n(x) &= \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c_x) \\ &= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt, \\ & \quad (c_x \in (\min(a,x), \max(a,x)) \end{aligned}$$

• Zbir recipročnih vrednosti prirodnih brojeva

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

naziva se *harmonijski red.* Očigledno je da sabirci postaju sve manji i manji i teže nuli, ali da li je suma ovog reda konačna ili ne? Ovaj problem je mučio mnoge matematičare hiljadu i više godina. Dokaz divergencije harmonijskog reda se najčešće pripisuje Lajbnicu (1673) i Jakobu Bernuliju (1689). Međutim, prvi dokaz je dao Nikola Orem (1320–1382) u četrnaestom veku. Orem je „razbio” članove reda na grupe

$$(1/2), \quad (1/3 + 1/4), \quad (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8), \ldots;$$

m-tu grupu čini 2^{m-1} članova. Očigledno, postoji beskonačno mnogo grupa pri čemu je suma članova u svakoj grupi veća od $2^{m-1} \cdot (1/2^m) = \frac{1}{2}$. Dakle, suma harmonijskog reda je beskonačna. Oremov rezultat ponovo je otkrio malo poznati italijanski matematičar Pjetro Mengoli (1625–1686) u svom delu *Novæ quadraturæ arithmeticæ* (1672).

⊕ Sledeća priča daje malo šaljiv uvid u ponašanje harmonijskog reda. Matematičar je organizovao lutriju u kojoj dobitni loz donosi vlasniku beskonačnu sumu novaca. Sve lozove je prodao vrlo brzo. Kada je dobitni loz izvučen i srećni dobitnik došao po nagradu, organizator lutrije mu je saopštio način isplate: 1 dolar odmah, 1/2 dolara sledeće nedelje, 1/3 dolara nedelju dana posle, itd. Harmonijski red $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots$ zaista ima beskonačnu sumu, ali ovaj zbir tako sporo raste da bi vlasnik loza posle 50 godina dobio oko 8 dolara i 44 centi.

MATEMATIČKI HUMOR

• Na času matematike u večernjoj školi za odrasle nastavnik postavlja pitanje:

„Vi tamo pozadi, recite mi kako glasi Pitagorina teorema?"

„Ne znam."

„Ne znate, a? Dobro, koliko je sinus od 30 stepeni?"

„Ne znam."

„Hm... a koliko rešenja ima kvadratna jednačina?"

„Nemam pojma."

„Pa zaboga, mi smo ponovili celokupno gradivo nekoliko puta a vi ništa ne znate. Pa kako mislite da završite ovu školu?"

„Otkud znam... Ja sam, izvinite na smetnji, samo došao da popravim ovaj ovde radijator!

• Na nekom seminaru, matematičar izlaže dokaz nove teoreme koju je nedavno formulisao. Za vreme izlaganja jedan od slušalaca ga iznenada prekida:

„Čekajte, čekajte! To nije tačno, imam kontraprimer!"

Izlagač mu sasvim staloženo odgovara:

„U redu, nema problema, ja imam i ***drugi*** *dokaz."*

• Matematičar, u prilično veselom društvu i dobrom raspoloženju u kafani, telefonira supruzi:

„Ma dobro, ne brini, jeste, kasnim s posla, daj ne ljuti se, znam, obećao sam da ću doći kući posle pet, ali evo nisam popio do kraja ni treću."

• Posle dugogodišnjeg istraživanja o prosečnoj dužini života muškaraca i žena, statističari su došli do sledećeg zaključka: *„Žene u proseku žive duže od muškaraca, a naročito je to izraženo kod udovica."*