FROBENIJUSOV PROBLEM I PILEĆI KOMADIĆI

Veća grupa matematičara posle završetka konferencije svratila je u Mekdonald-sov restoran sa namerom da naruče poznati specijalitet pileće mek-komadiće (u originalu *chicken mcnuggets*). U restoranu se prodaju tri vrste pakovanja: od 6, 9 i 20 mek-komadića i raspakivanje ne dolazi u obzir. Matematičari ne brinu da će isporuka mek-komadića u ovim pakovanjima biti moguća jer je njima dobro poznato da na osnovu Šurove teoreme bilo koji dovoljno veliki broj se može izraziti kao linearna kombinacija *uzajamno prostih brojeva* (brojevi koji nemaju zajedničke delioce osim broja 1), a 6, 9 i 20 nemaju zajednički delilac veći od 1. Dakle, ako je broj matematičara n i n je dovoljno veliko, tada jednačina $n = 6x + 9y + 20z$ uvek ima rešenja x, y i z, i isporuka mek-komadića je uvek moguća.

Dok su razmišlali o naručivanju mek-komadića, jedan matematičar je pitao: *„Da li je isporuka uopšte moguća, šta ako nas nema dovoljno? Koliko je, zapravo najveći (konačan) broj mek-komadića koji se ne može isporučiti koristeći pakovanja od* 6, 9 *i* 20 *mek-komadića?"*

Pitanje na prvi pogled izgleda naivno (možda i jeste za dobre matematičare) i problem jednostavan, ali nije tako. U ovom slučaju traži se najveće moguće n takvo da za svako $k > n$ jednačina $k = 6x + 9y + 20z$ uvek ima rešenje (ne obavezno jedinstveno), ali ne i za n. Pritom nije isključeno da za neke brojeve $m < n$ jednačina ima rešenje. Postavljeni zadatak dovodi do mnogo opštijeg problema koji je poznat kao Frobenijusov problem:[1]

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ dati međusobno uzajamno prosti brojevi takvi da je $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ i uvedimo funkciju

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n,$$

gde su x_i nepoznati nenegativni celi brojevi. Sledeće pitanje dovodi do Frobenijusovog problema.

Frobenijusov problem. *Odrediti najveću vrednost* $\mathcal{F}_n$ *funkcije* $g(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *za koju jednačina* (često zvana Frobenijusova jednačina)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \mathcal{F}_n$$

nema rešenja u skupu nenegativnih celih brojeva x_i.

Rešenje $\mathcal{F}_n$, ako postoji, zove se *Frobenijusov broj*. Frobenijusov problem može se zgodno interpretirati preko novčića sa denominacijama $a_1, \ldots, a_n$; Frobenijusov broj je jednostavno najveća suma novaca koja se ne može isplatiti pomoću ovih novčića.

[1] Nemački matematičar Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) bio je profesor na ETH (Cirih) i Univerzitetu u Berlinu. Dao je veliki doprinos u oblasti diferencijalnih jednačina, Teorije grupa, Teorije brojeva i Teorije nenegativnih matrica.

Pre nego što razmotrimo opšti Frobenijusov problem i vratimo se matematičarima u Mekdonaldsovom restoranu, teleportujmo se u 19. vek kada je čuveni britanski matematičar Džems Džorž Silvester postavio sledeći jednostavan ali interesantan zadatak u časopisu *Educational Times.*

★ *Kolekcionar ima veći broj poštanskih maraka koje vrede po* 5 *i* 17 *funti. Koliki je najveći konačan iznos (u funtama) koji kolekcionar ne može da isplati kombinacijom maraka koje poseduje?*

Neka je z iznos koji treba isplatiti kombinacijom maraka vrednosti od 5 i 17 funti. Tada je

$$z = 5a + 17b, \tag{1}$$

a ovo je linearna jednačina Diofantovog tipa. Iznos z je prirodan broj a nepoznate a i b su nenegativni prirodni brojevi. Potrebno je odrediti najveći broj z_0 koji se ne može predstaviti u obliku (1).

Umesto opisanog partikularnog slučaja posmatraćemo opštiji slučaj, naime, dokazaćemo sledeće tvrđenje:

Ako su p i q uzajamno prosti prirodni brojevi, tada je $pq - p - q$ najveći ceo broj koji se ne može prikazati u obliku $pa + qb$, $a, b \in \mathbf{N}_0$.

Da bismo rešili ovaj zadatak, potrebno je dokazati: 1° broj $pq - p - q$ se ne može predstaviti u navedenom obliku; 2° svaki broj $n > pq - p - q$ se može prikazati u obliku $pa + qb$.

1° Pretpostavimo, suprotno tvrđenju, da postoje brojevi $a, b \in \mathbf{N}_0$, takvi da je

$$pq - p - q = pa + qb, \quad \text{ili} \quad pq = p(a+1) + q(b+1).$$

Kako su p i q uzajamno prosti, sledi da $p|(b+1)$ i $q|(a+1)$.[2] Pri tom je $b + 1 \neq p$, inače bi bilo $a = 1$. Slično, mora da bude $a + 1 \neq q$. Prema tome, $p < b + 1$ i $q < a + 1$, tj. $b > p - 1$ i $a > q - 1$, te je

$$pq - p - q = pa + qb > p(q-1) + q(p-1) = 2pq - p - q,$$

tj. $pq > 2pq$, što je nemoguće. Dokaz tvrđenja 1° sledi na osnovi principa kontradikcije.

2° Neka je $n > pq - p - q$ i neka je (a_0, b_0) proizvoljno celobrojno rešenje Diofantove jednačine

$$pa + qb = n + p + q.$$

Na osnovu teoreme o egzistenciji rešenja linearnih diofantskih jednačina (NZD(p, q) deli desnu stranu), ovo rešenje postoji jer su p i q uzajamno prosti brojevi (NZD$(p, q) =$ 1). Opšte rešenje gornje Diofantove jednačine dato je sa

$$a = a_0 + qt, \quad b = b_0 - pt, \quad t \in \mathbf{Z}.$$

[2] $a|b$ označava da je ceo broj b deljiv celim brojem a.

Izaberimo t tako da je $0 < a < q$. Tada je $t < \dfrac{q-a_0}{q}$ i

$$b > b_0 - p\frac{q-a_0}{q} = \frac{a_0p + b_0q - pq}{q} = \frac{n-(pq-p-q)}{q} > 0.$$

Ovim je dokazano da se broj n može predstaviti na opisani način jer je iz Diofantove jednačine

$$n = p(a-1) + q(b-1) = pa' + qb' \ (a', b' \in \mathbf{N}_0).$$

U specijalnom slučaju, uzimajući $p = 5$ i $q = 17$, nalazimo da je najveći broj (iznos) koji se ne može dobiti linearnom kombinacijom brojeva 5 i 17 jednak

$$z_0 = pq - p - q = 5 \cdot 17 - 5 - 17 = 63,$$

i ovo je rešenje Silvesterovog problema.

Kao što je pokazano gore, u slučaju uopštenog Silvesterovog problema imamo

$$\mathcal{F}_2 = g(a_1, a_2) = (a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1 = a_1a_2 - a_1 - a_2$$

i, u specijalnom (Silvesterovom) slučaju, za $a_1 = 5$ i $a_2 = 17$, dobija se $\mathcal{F}_2 = 63$.

Teorija koja se odnosi na $\mathcal{F}_2$ prosto vapi za nekim zgodnim praktičnim primerom i on upravo sledi:

★ *Kockar u kazinu u Las Vegasu (Nevada) dobio je* 375 *dolara. Krupije može isplaćivati novac samo pomoću žetona koji vrede* 12 *i* 35 *dolara i to preko automata. Da li on može isplatiti kockara?*

Kazino hotela *Bellagio*, Las Vegas, Ⓢ M. Petković

Silvesterov rezultat dovodi do odgovora. Najveća suma novca koju krupije ne može isplatiti je

$$\mathcal{F}_2 = g(12, 35) = (12-1)(35-1) - 1 = 373 \text{ dolara.}$$

Prema tome, zahtevana isplata od \$375 je moguća: 9 žetona od \$35 i 5 žetona \$12 su potrebni.

Sasvim prirodno nameće se pitanje da li je moguće naći Frobenijusov broj $\mathcal{F}_n$ za $n \geq 3$? Postoji mnogo radova koji razmatraju ovo pitanje. Eksplicitna formula za $n \geq 3$ još nije pronađena. Međutim, Zajmer i Bejer došli su 1978. do rešenja izraženog pomoću algoritma koji radi preko verižnih razlomaka za $n = 3$. Njihov rezultat su uprostili Rödseth (1978) i kasnije Greenberg (1988). Dejvison (1994) je izveo relativno preciznu donju granicu

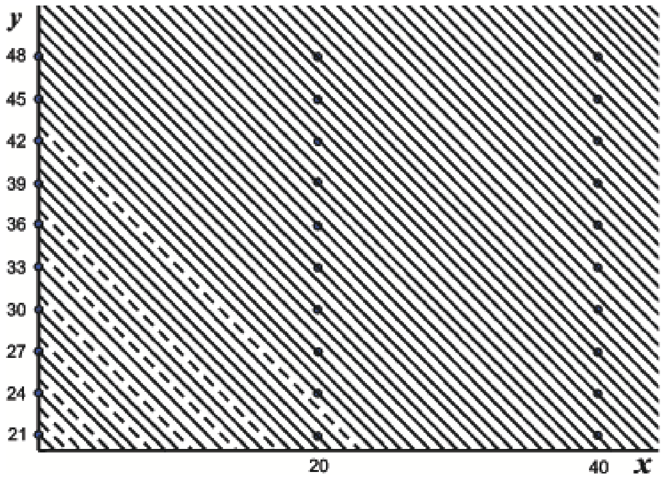
$$\mathcal{F}_3 \geq \sqrt{3a_1a_2a_3} - a_1 - a_2 - a_3, \tag{1}$$

dok su preciznu gornju granicu dali Beck i Zacks (2004). Opšta formula za $n \geq 4$ i dalje nije poznata, mada su razvijeni brzi algoritmi za nalaženje Frobenijusovog broja za konkretne slučajeve ali jedino ako je n relativno malo.

Vratimo se sada matematičarima u Mekdonaldsovom restoranu. Radilo se o tome koliki je kritični broj (tzv. Frobenijusov broj) osoba iznad koga se može izvršiti isporuka mek-komadića. Da bismo skratili proces rešavanja, koristimo Dejvisonovu donju granicu (1) i nalazimo

$$\mathcal{F}_3 \geq \sqrt{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 20} - 6 - 9 - 20 \approx 21.92 > 21.$$

Prema tome, kandidate za Frobenijusov broj tražićemo samo među brojevima većim od 21.



Sl. 1 Grafičko rešenje problema pilećih mek-komadića

Grafički metod je pogodan za nalaženje $\mathcal{F}_3$. Neka je x proizvoljan umnožak broja 20 i neka je y (> 21) proizvoljan umnožak broja 3 (izuzimajući 3). Očigledno, y se može predstaviti kao linearna kombinacija brojeva 6 i 9 za $y \geq 6$. Sada formiramo mrežu tačaka u xy-koordinatnoj ravni sa kordinatama (x, y). Svaka prava $x + y = k$ predstavlja ukupan broj k mek-komadića; videti sliku 1. Podebljana linija prolazi kroz bar jednu tačku mreže, recimo (x^*, y^*), označavajući sa $k = x^* + y^*$ broj mek-komadića koji može biti isporučen. S druge strane, isprekidana linija ne prolazi ni kroz jednu tačku mreže tako da odgovarajući broj k mek-komadića ne može biti isporučen. Sa slike 1 zapažamo da „najviša” isprekidana linija je $x + y = 43$, tako da je broj 43 kandidat za $\mathcal{F}_3$.

Ostaje da proverimo neke brojeve veće od 43. Neka je $A_1 = \{44, 45, 46, 47, 48, 49\}$ prva grupa od šest uzastopnih brojeva. Sledeće linearne kombinacije brojeva 6, 9 i 20 su moguće (ne neophodno izražene na jedinstven način):

$$\begin{aligned} 44 &= 6 + 9 + 9 + 20, \\ 45 &= 9 + 9 + 9 + 9 + 9, \\ 46 &= 6 + 20 + 20, \\ 47 &= 9 + 9 + 9 + 20, \\ 48 &= 6 + 6 + 9 + 9 + 9, \\ 49 &= 9 + 20 + 20. \end{aligned}$$

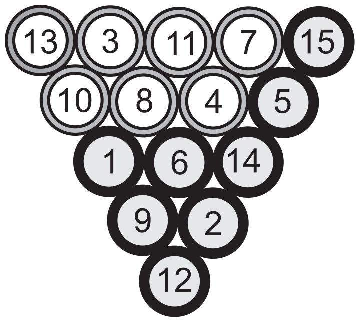
Očigledno, elementi sledeće grupe $A_2 = \{50, 51, 52, 53, 54, 55\}$ mogu se dobiti dodavanjem broja 6 odgovarajućim brojevima iz grupe A_1, grupa A_3 može se formirati na isti način iz A_2, itd. Prema tome, 43 je najveći broj (=Frobenijusovom broju) mek-komadića koji ne može biti isporučen.

ZADACI ZA REŠAVANJE

Z-63 • LET AVIONA OKO SVETA. Nekoliko aviona stacionirano je na jednom ostrvu koje se nalazi na Ekvatoru. Sa punim rezervoarom goriva avion može da obiđe polovinu Zemljine kugle bez spuštanja na zemlju. Pri snabdevanju u vazduhu iz rezervoara jednog aviona može se pretočiti proizvoljna količina goriva u rezervoar drugog aviona. Snabdevanje gorivom na zemlji moguće je jedino na ostrvu (bazi).

Koji je najmanji broj aviona koji mogu omogućiti let jednog aviona oko Zemljine kugle duž Ekvatora ako pretpostavimo da su brzina aviona i njihova potrošnja goriva jednake za sve avione? Osim toga, zahteva se da svi avioni imaju mogućnost da se vrate u bazu. Radi jednostavnosti, pri rešavanju zadatka pretpostaviti da se snabdevanje u vazduhu i na zemlji vrši trenutno, bez gubitka vremena.

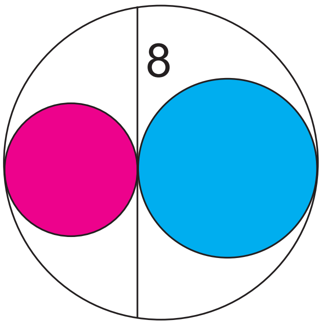
Z-64 • TROUGAO APSOLUTNIH RAZLIKA. Petnaest okruglih žetona iste veličine na kojima su napisani brojevi od 1 do 15 postavljeno je tako da formiraju trougao pomoću pet redova žetona kao na slici gore. Kaže se da je ovaj trougao reda 5. Primećujemo da u tri slučaja apsolutna vrednost razlike brojeva na susednim žetonima daje broj koji se nalazi ispod ovog para; naime, $|13-3| = 10$, $|3-11| = 8$, $|11 - 7| = 4$, ali ne više. Zadatak se sastoji u tome da se svih 15 žetona rasporedi tako da svaki broj ispod para brojeva bude apsolutna vrednost razlike tih brojeva.



Zadatak je postavio Džordž Sikermen sa Državnog univerziteta Njujork u Bafalu, koji je dokazao da u slučaju trouglova reda 6 (brojevi od 1 do 21), reda 7 (brojevi od 1 do 28) i reda 8 (brojevi od 1 do 36) ne postoje rešenja, ali da trougao reda 5 ima jedinstveno rešenje.

REŠENJA ZADATAKA IZ PRETHODNOG SAJT-IZDANJA

Z-61 • TRI KRUGA. Kao što je dobro poznato, u Hobitonu, naselju Hobita, ulazna vrata su okrugla. Hobit Željko, koji je uvek želeo da ima nešto posebno u svom domu, napravio je na svojim drvenim vratima dva nejednaka okrugla prozora, na svakom krilu po jedan kao što pokazuje slika 2. Svaki od krugova dodiruje druga dva i njihovi centri se nalaze na istoj pravoj. Ivica krila visoka je 8 decimetara i ona predstavlja kako tetivu većeg kruga, tako i tangentu dva manja kruga. Kolika je površina drvenog dela Željkovih vrata (neobojen deo)?



Sl. 2 Površina omeđene (neobojene) oblasti

REŠENJE: Neka r_1 i r_2 označavaju poluprečnike dva mala kruga i neka je r poluprečnik najvećeg kruga (sl. 3). Tada je $r = r_1 + r_2$. Tražena površina je jednaka

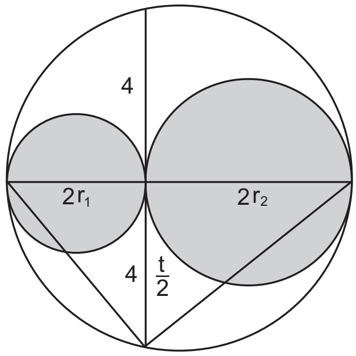
$$S = \pi r^2 - \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\big((r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2\big) = 2\pi r_1 r_2.$$

Kako je tetiva normalna na prečnik, njena polovina je geometrijska sredina prečnika manjih krugova,[3]

$$\frac{t}{2} = 4 = \sqrt{2r_1 \cdot 2r_2}, \quad \text{to jest, } r_1 r_2 = \frac{16}{4} = 4.$$

[3] Visina h koja deli hipotenuzu na odsečke a i b je geometrijska sredina ovih odsečaka, tj. $h = \sqrt{ab}$.

Dakle, $S = 2\pi \cdot 4 = 8\pi\,\mathrm{dm}^2 \approx 25.13\,\mathrm{dm}^2$.



Sl. 3

Z-62 • **LJUBOMORNI PAROVI PRELAZE REKU.** Srednjovekovni zadatak o prelazu bračnih parova preko reke, koji će biti izložen u nastavku, pripada klasi „problema transporta preko reke." U nekim radovima ovaj problem se pripisuje svešteniku i matematičaru Alkuinu iz Jorka (8. vek) i poznatom italijanskom matematičaru Nikoli Tartalji (550–1557).

★ *Tri muškarca i njihove lepe supruge na svom putovanju došli su do reke. Preko reke je moguće preći u malom čamcu za dvoje. Dodatni problem stvorili su ljubomorni muževi; naime, nijedan od njih ne dozvoljava da se njegova supruga nađe u društvu jednog ili dvojice muškaraca bez njegovog prisustva, ni u čamcu, ni na obali. Na koji način će ova tri para da pređu reku u najmanjem broju prelaženja pod navedenim uslovima, podrazumevajući da i žene umeju da upravljaju čamcem?*

REŠENJE: Potrebno je najmanje jedanaest prelaza i, mada postoji više načina za transport, broj prelaza se ne može smanjiti. Velikim slovima A, B, C označimo muškarce, a malim slovima a, b, c njihove supruge, pri čemu se isto slovo odnosi na jedan bračni par. Dajemo jedno rešenje zapisano imenima osoba koje se trenutno nalaze 1) na polaznoj obali, 2) u čamcu i 3) na dolaznoj obali. Strelice $\rightarrow$ i $\leftarrow$ u donjoj listi označavaju odlazak i povratak, respektivno. Istoričari matematike veruju da je prikazano rešenje dao sveštenik i matematičar Alkuin iz Jorka (8. vek).

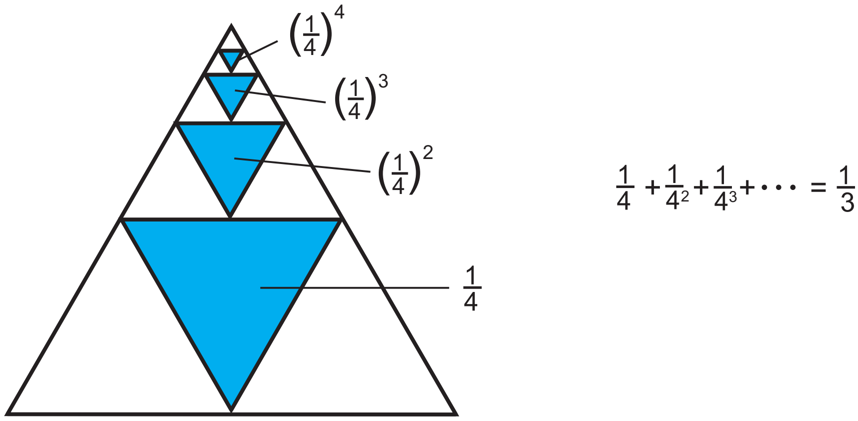
	polazna obala	veslač(i)	dolazna obala
–	$ABCabc$	——	——
1.	$BCbc$	$\rightarrow Aa$	Aa
2.	$ABCbc$	$\leftarrow A$	a
3.	ABC	$\rightarrow bc$	abc
4.	$ABCa$	$\leftarrow a$	bc
5.	Aa	$\rightarrow BC$	$BCbc$
6.	$ABab$	$\leftarrow Bb$	Cc
7.	ab	$\rightarrow AB$	$ABCc$
8.	abc	$\leftarrow c$	ABC
9.	c	$\rightarrow ab$	$ABCab$
10.	Cc	$\leftarrow C$	$ABab$
11.	–	$\rightarrow Cc$	$ABCabc$

MATEMATIČKE ZANIMLJIVOSTI

• **Sumiranje geometrijskog reda.** Prvi beskonačni geometrijski red čija je suma bila poznata je red

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots.$$

Arhimedov dokaz je zasnovan na slici 4. Ovaj red je koristio Arhimed (*oko* 225 P. N. E.) u svojoj čuvenoj kvadraturi parabole, preteči integralnog računa. Opštu formulu za sumiranje beskonačnog reda $a+aq+aq^2+\cdots+aq^n+\cdots$, gde je $|q|<1$, dao je francuski matematičar Vijet (*oko* 1590).

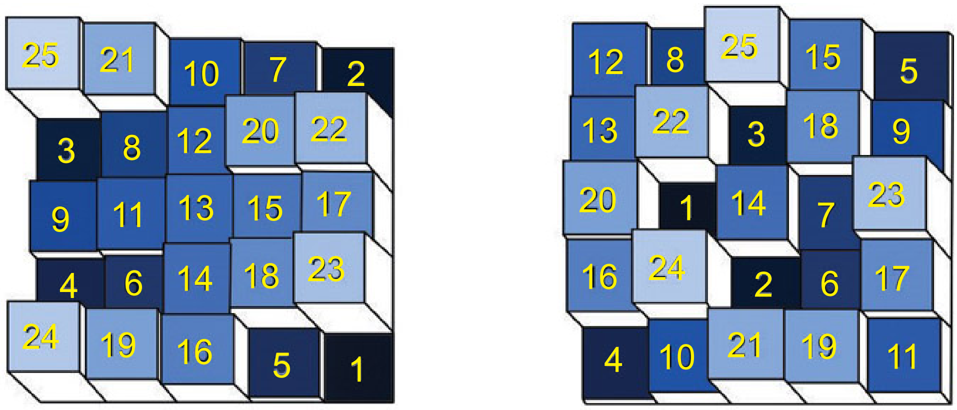


Sl. 4 Arhimedov geometrijski dokaz sume beskonačnog geometrijskog reda

• **Magični kvadrat koji „drži vodu."** Na slici 5 dat je jedan od mnogobrojnih magičnih kvadrata dimenzije 5×5.[4] Dodajmo i treću dimenziju ovom kvadratu na taj način što će vrednost broja u kvadratu predstavljati njegovu „moć" (amplitudu), predstavljenu visinom u 3D u odnosu na nulti nivo.

Sa slike 5a jasno vidimo da su brojevi 23, 24 i 25 najviše „izdignuti" u odnosu na nulti nivo ravni u kojoj je magični kvadrat. Pretpostavimo sada da na svaki kvadrat počinje da pada kiša podjednake gustine i da se sliva sa „višeg" na „niži" kvadrat preko ivice horizontalno i vertikalno, ali ne i dijagonalno. Šta će se desiti posmatrajući magični kvadrat 5a? Primećujemo da je svaka horizontala jedna kaskada niz koju se voda sliva i ne zadržava ni u jednom kvadratu; na primer, u prvoj horizontali imamo kaskadu 25, 21, 10, 7, 2 i voda odlazi van kvadrata. Dakle, nijedan od kvadrata nije „rezervoar" vode. Kako konstruisati magični 3D kvadrat tako da „drži vodu" u najvećem mogućem rezervoaru?

[4] Postoji 275 305 224 magičnih kvadrata 5×5. Ovaj broj je izračunao američki matematičar i programer Ričard Skropel 1973. godine.



a) b)

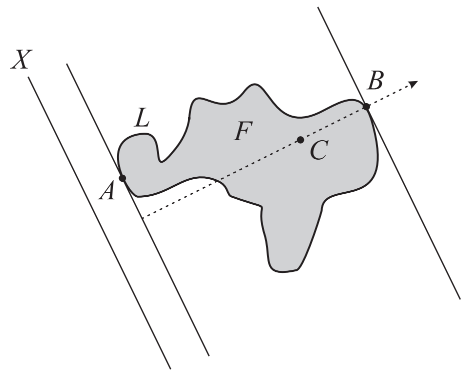
Sl. 5 Magični kvadrat koji „drži" vodu

Rešenje je dato na slici 5b: prikazani magični kvadrat zadržava vodu u kvadratima 3, 1, 14, 7, 2 i 6 (u plavoj boji) koji obrazuju rezervoar. Ovaj rezervoar sadrži 69 kubnih jedinica vode i ova količina ne može biti nadmašena. Ovaj izuzetno težak ali veoma zanimljiv i ekstremno izazovan zadatak se može rešiti samo uz pomoć kompjutera i to mukotrpnim radom ispitujući sistematski svih 275 305 224 postojećih magičnih kvadrata 5×5 (koje treba najpre pronaći).

• **„Palačinka-teorema."** Iz Matematičke analize je poznato da ako postoji neprekidna kriva definisana jednačinom $y = f(x)$ koja ima minimalnu vrednost A i maksimalnu vrednost B na intervalu definisanosti $[a, b]$, tada funkcija f mora uzeti svaku vrednost između A i B. Ovo je intuitivno jasno na osnovu grafika funkcije f na $[a, b]$, mada matematičari nikom ne veruju i uvek zahtevaju strog matematički dokaz. Gornje tvrđenje može se predefinisati tako da se direktno dolazi do formulacije poznate *Teoreme o srednjoj vrednosti.* U ovom nano-prilogu nećemo se zadržavati na dokazu, već ćemo upotrebiti gornju teoremu da dokažemo jedan interesantan rezultat opšte poznat kao „palačinka-teorema."

Posmatrajmo oblast u ravni ograničenu zatvorenom linijom koja ne seče samu sebe. To može da izgleda kao palačinka (sl. 6) pa otuda i naziv gore pomenute teoreme. Pitanje glasi: *Da li se ova oblast može podeliti na dva dela jednakih površina i to polazeći iz bilo kog pravca?*

Odgovor je pozitivan, da, može. Da bismo to dokazali, najpre povucimo pravu X izvan oblasti (palačinke) F pod proizvoljnim uglom (ovim je definisan proizvoljan pravac pomenut u zadatku), videti sliku 6. Neka je površina oblasti F jednaka P_F.



Sl. 6 „Palačinka-teorema”

Pomerajmo pravu X prema graničnoj liniji L oblasti F zadržavajući isti ugao sve dok X ne dodirne liniju L u tački A. U ovoj startnoj poziciji nijedan deo figure F nije pokriven, označimo to sa $P_F(A) = 0$, gde P_F označava površinu „isečenu” od figure F. Prava X zatim nastavlja od tačke A da „seče” figuru F. U nekoj tački C unutar oblasti F je $P_F(C) > 0$. Prava X izlazi iz oblasti F u tački B, oblast F je potpuno prekrivena i imamo da je $P_F(B) = P_F$. Vrednost $P_F(C)$ neprekidno raste dok se prava X pomera od ulazne tačke A do izlazne tačke B uzimajući sve vrednosti od 0 do P_F. Na osnovu „palačinka-teoreme” u jednoj poziciji tačke C^* mora biti $P_F(C^*) = P_F/2$, što potvrđuje da postoji rešenje postavljenog zadatka. Primetimo da izložena diskusija ne daje odgovor o poziciji tačke C^*.

MATEMATIČKI HUMOR

• Sledeće dve anegdote o čuvenom naučniku Džonu fon Nojmanu su na temu prevoznih sredstva.

(I) Džon fon Nojman je uživao u različitim neformalnim aktivnostima, živeći načinom života koji se veoma razlikovao od konvencionalnog stila profesora. Između ostalih stvari, veoma je voleo da vozi kola mada je bio loš vozač. U Prinstonu (radio je na čuvenom Institutu za primenjene studije na kome su, pored ostalih, radili Ajnštajn i Gedel) je čak postojalo „fon Nojmanovo ćoše”, gde je Nojman više puta napravio saobraćajni udes. Jednu od svojih lomljavina kolima, Nojman je ovako objasnio:

„Ja sam lepo vozio putem brzinom od 50 *milja na sat (oko* 80 *km/h), dok su stabla drveća sa moje desne strane ravnomerno prolazila pored mene. Odjednom mi je jedno stablo preprečilo put i BUM!”*

Druga anegdota govori o Nojmanovom putovanju vozom. Nojman je tokom puta ogladneo, pa je zamolio konduktera da pošalje do njegovog sedišta čoveka koji prodaje sendviče. Mrzovoljni kondukter mu je odgovorio:

„U redu, ako ga vidim."

„Pa trebalo bi. Ovaj voz je linearan, zar ne?" uzvratio mu je Nojman.

• Milan, učenik osnovne škole, inače osrednji đak, vraća se iz škole sa tri sata zakašnjenja i roditelji ga odmah pitaju gde se toliko zadržao.

„Upravo sam polazio iz škole kada me nastavnik matematike presreo u hodniku i odveo u fiskulturnu salu gde se održavalo školsko takmičenje iz matematike," objašnjava Milan.

„Otkud tebe, pa ti jedva imaš prelaznu ocenu iz matematike. Pa šta se desilo na kraju?" pita otac.

„Šta sam mogao, ušao sam u salu, seo i radio dva sata. Zadatak nije bio ni težak ni lak, trebalo je pomnožiti 9×7. *Dao sam sve od sebe i sa rezultatom* 65 *osvojio sam treće mesto.*