IGRA NA DODEKAEDRU I HAMILTONOVI PUTEVI

Zajedno sa Silvesterom i Kejlijem, Vilijam Rouan Hamilton (William Rowan Hamilton, 1805–1865) je bio najistaknutiji britanski matematičar 19. veka. Nekoliko pojmova i naziva u mehanici i matematici nosi njegovo ime.

Kao dečak, Hamilton je bio usmeravan od svog ujaka, lingviste, na učenje stranih jezika. Hamilton je bio čudo od deteta: u petoj godini čitao je knjige na grčkom i hebrejskom; takođe je mogao da piše francuski i italijanski; u desetoj godini učio je arapski i sanskrit; u dvanaestoj već je dobro znao ove jezike, zajedno sa sirijskim, persijskim, hindu i malajskim. Prekretnica u njegovom životu nastala je kada je imao dvanaest godina posle susreta sa američkim „živim kalkulatorom” Zirom Kolbernom. Zira Kolbern je mogao da izvodi napamet komplikovana aritmetička izračunavanja i Hamilton je odlučio da oproba svoje sposobnosti u takmičenju sa njim. Ispostavilo se da je poraz od Kolberna probudio kod Hamiltona veliki interes za matematiku, kojoj se odmah posle toga potpuno posvetio.

Kao što je već napomenuto u sajt-izdanju #5 (novembar 2018), Teorija grafova je nastala iz Ojlerovih problema rekreativne matematike (prelaz preko kenigsberških mostova). Slično Ojlerovim grafovima, jedan vek kasnije, jedan drugi tip grafova proizašao je iz igre. Godine 1856. Vilijam Hamilton je postavio jedan zanimljivi graf-zadatak u vezi sa dodekaedrom. Da podsetimo, dodekaedar je jedan od pet pravilnih poliedara, poznatih kao Platonova tela, koji ima 12 strana – pravilnih petouglova, 20 temena i 30 ivica, pri čemu se u svakom temenu sastaju tri petougla (sl. 1). Tri godine kasnije problem je prerastao u igru na dodekaedru nazvanu *Icosian.* Igra je često opisivana kao „nalaženje puta oko sveta.” Hamiltonov zadatak glasi:[1]

★ *Naći put koji kroz svako teme dodekaedra prolazi jednom i samo jednom.*

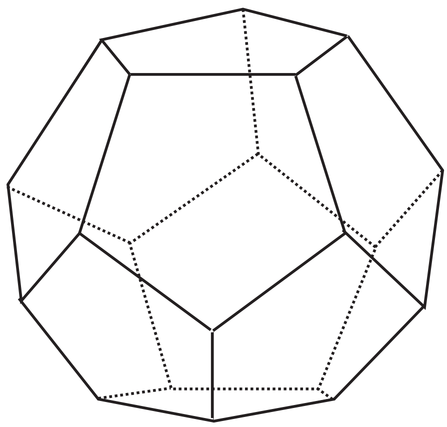
Možda na prvi pogled zbunjuje naziv koji asocira na ikosaedar (pravilni poligon sa 20 strana), Međutim u pitanju je konstrukcija putanje koja prelazi kroz temena dodekaedra, a ovaj poliedar ima 20 temena. Prisećajući se da *icosa* na starogrčkom znači dvadeset, dolazimo do opravdanja za naziv.

Ovaj zadatak može se bolje sagledati ako se dodekaedar predstavi preko svoje stereografske projekcije u ravni, tzv. skeletona dodekaedra (sl. 2) koji ima oblik ravanskog grafa. Tada se gornji zadatak može formulisati na sledeći način: *Obići sve tačke mreže dodekaedra sa slike* 2 *prolazeći kroz svaku tačku jednom i samo jednom.*

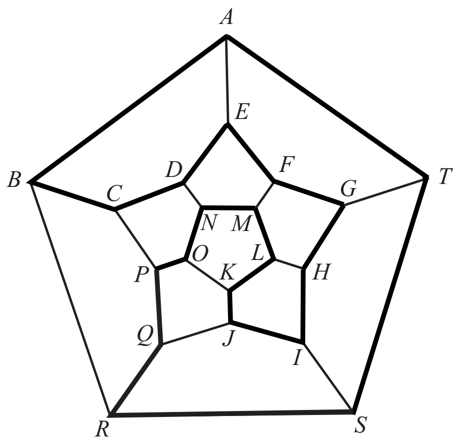
Putevi koji imaju osobine opisane u gornjem zadatku zovu se *Hamiltonovi putevi*, a ravanski grafovi sa ovom osobinom *Hamiltonovi grafovi.* Zatvoreni Hamiltonov put

[1] U stvari, Hamilton je prodao ideju za Icosian igru kompaniji J. Jacques and Son, proizvođaču finih servisa, za 25 funti, ali se ispostavilo da je ovo bila loša trgovina – za kupca.

koji se završava u početnoj tački zove se *Hamiltonova kontura.* Ova vrsta puteva je od velikog interesa u mnogim primenama, kao što su telekomunikacione mreže, avio saobraćaj i problemi transporta. Opisani put bio bi od koristi, na primer, raznim raznosačima robe ili poštarima.



Sl. 1 Hamiltonova igra – dodekaedar



Sl. 2 Hamiltonova kontura

Jedna Hamiltonova kontura duž skeletona dodekaedra prikazana je na slici 2 pomoću podebljanih linija, i može se opisati sledećim nizom slova (posećenih temena):

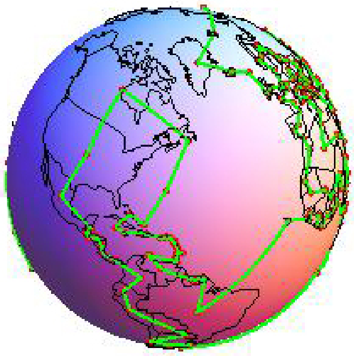
$$A-B-C-D-E-F-G-H-I-J-K-L-M-N-O-P-Q-R-S-T-A$$

Jedan drugi način za igranje je igra u kojoj igrač mora da nađe Hamiltonovu konturu polazeći od pet datih početnih temena. Na primer, ako je pomoću slova $NMFGH$ dat početak puta, igrač može kompletirati Hamiltonovu konturu na dva načina:

$$N-M-F-G-H \mid L-K-J-I-S-T-A-E-D-C-B-R-Q-P-O,$$

$$N-M-F-G-H \mid L-K-O-P-C-B-R-Q-J-I-S-T-A-E-D.$$

Na početku je napomenuto da je Hamiltonov put na dodekaedru često popularno opisivan kao *Put oko sveta.* Koristeći moćni programski paket *Mathematica* koji je razvila (i dalje razvija) kompanija *Wolfram* (na čelu sa idejnim tvorcem Stivenom Volframom), moguće je napraviti simulaciju *Puta oko sveta*, pri čemu se zaista obilaze sve države sveta (po konturi koja nije Hamiltonova). Pri ovome se koristi baza *CountryData* koju poseduje ovaj softver i aplikacija *Graphics3D* za crtanje. Rezultat je više nego impresivan i prikazan je na slici 3.



Sl. 3 *Put oko sveta* nacrtan posredstvom kompjuterskog softvera *Mathematica*

Kao što je prikazano u sajt-izdanju #5 iz novembra 2018, u kome su date i najosnovnije osobine iz Teorije grafova, karakterizacija Ojlerovih grafova je jednostavna i data je Ojlerovom teoremom. Međutim, kriterijum (jednostavan ili komplikovan) za Hamiltonove grafove još uvek nije pronađen i to je jedan od najtežih otvorenih problema u Teoriji grafova. U knjizi *Problem Solving Through Recreational Mathematics* (1980), autori B. Averbah i O. Čejn su napisali: *„Nije poznat kriterijum koji kompletno karakteriše graf koji poseduje Hamiltonov put; niti postoji jednostavan algoritam koji omogućava nalaženje Hamiltonovog puta ako on postoji. Svaki graf se mora posebno analizirati i ispitivati, a nalaženje Hamiltonovog puta – ako on postoji – pitanje je pronicljivosti, sreće i uporne i rezonske primene metoda probe i greške."*

Postoje brojni rezultati koji se odnose na dovoljne uslove za Hamiltonove grafove. Dva najznačajnija tvrđenja koja daju *dovoljne uslove* formulisali su G. A. Dirak (Dirac) (1952) i O. Ore (1960) koristeći pojam stepena čvora $\deg(\cdot)$.

Dirakova teorema: *Neka je G prost graf sa n $(n \geq 3)$ čvorova. Ako je $\deg(v) \geq n/2$ za svaki čvor v grafa G, tada je G Hamiltonov graf.*

Oreova teorema: *Neka je G prost graf sa n $(n \geq 3)$ čvorova. Ako je $\deg(v) + \deg(w) \geq n$ za svaki par nesusednih čvorova v i w grafa G, tada je G Hamiltonov graf.*

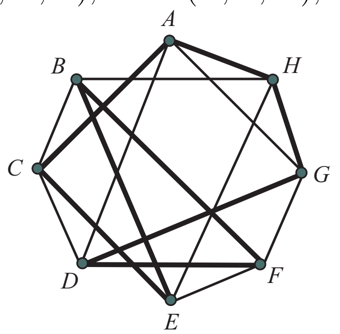
Kao što je već naglašeno, uslovi u ovim teoremama su dovoljni, ali ne i potrebni. Zaista, svaki čvor grafa na slici 2 ima stepen 3 ($< 10 = 20/2$, gde je 20 broj čvorova – videti Dirakovu teoremu), ali je graf ipak Hamiltonov. Primetimo da je Dirakova teorema specijalan slučaj Oreove teoreme. Primenu Oreove teoreme ilustrovaćemo na sledećem zadatku:

★ *Kralj Artur je okupio na dvoru svojih $2n$ vitezova. Oni se pripremaju za jedno važno savetovanje u glavnoj odaji sa okruglim stolom. Svaki vitez ima najviše $n-1$ neprijatelja među vitezovima. Da li vitezovi mogu da sednu za okrugli sto tako da niko od njih ne sedi pored svog neprijatelja?*

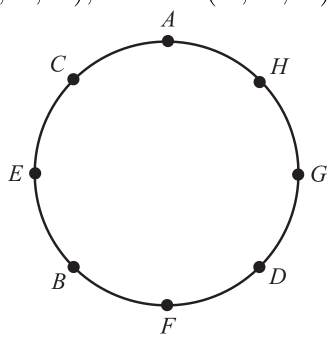
Problem ćemo rešiti konstrukcijom grafa sa $2n$ temena, gde svako teme predstavlja jednog viteza. Dva temena K i M ćemo povezati ako i samo ako su odgovarajući vitezovi K i M prijatelji. S obzirom na date uslove sledi da svaki vitez ima bar n prijatelja. Ovo znači da je stepen svakog čvora v_i najmanje n. Kako je $\deg(v_i) \geq n = 2n/2$ $(i = 1, \ldots, n)$, na osnovu Dirakove teoreme sledi da postoji graf G sa Hamiltonovom konturom. Ova kontura daje zahtevani raspored vitezova.

Raspored vitezova ilustrovaćemo na konkretnom primeru od 8 vitezova A, B, C, D, E, F, G, H. Svaki vitez ima tačno 3 neprijatelja naznačena u zagradama u sledećoj listi:

$$\boldsymbol{A}\ (B,E,F),\quad \boldsymbol{B}\ (A,D,G),\quad \boldsymbol{C}\ (F,G,H),\quad \boldsymbol{D}\ (B,E,H)$$
$$\boldsymbol{E}\ (A,D,G),\quad \boldsymbol{F}\ (A,C,H),\quad \boldsymbol{G}\ (B,C,E),\quad \boldsymbol{H}\ (C,D,F)$$



Sl. 4a Graf vitezova kralja Artura



Sl. 4b Raspored vitezova

Na osnovu gornje „liste neprijatelja” možemo konstruisati odgovarajući graf, dat na slici 4a, i naći Hamiltonovu konturu (naznačenu podebljanim linijama) koja polazi, recimo, iz A. Uzimajući temena duž ove Hamiltonove konture i čuvajući njihov poredak, dobićemo raspored vitezova prikazan na slici 4b.

Napomenimo da čuveni *Problem skakačevog puta*, gde se traži da skakač obiđe sva 64 polja šahovske table, prelazeći preko svakog polja jednom i samo jednom, je jedan primer nalaženje Hamiltonovog puta (ili konture ako se traži da skakač završi svoju putanju na polaznom polju). Ovaj problem su proučavali Ojler, De Muavr, De Monmor, Vandermond i drugi čuveni matematičari.

NAGRADNI ZADATAK

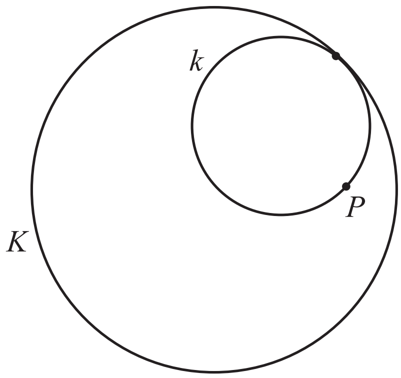
Tačno i kompletno obrazloženo rešenje postavljenog nagradnog zadatka koje prvo pristigne do 20. maja biće nagrađeno vrednom knjigom iz popularne matematike. Rešenja napisana u tekst-procesorima Word ili Latex (sa skicom/crtežom ako je potrebno), ili čitko napisana rukom i skenirana/fotografisana u jpg formatu, treba poslati na imejl adresu

miodragpetkovic@gmail.com

zajedno sa imenom i prezimenom, punom adresom i brojem mobilnog telefona (zbog uručenja nagrade brzom poštom).

Tekst nagradnog zadatka iz sajt izdanja # 31:

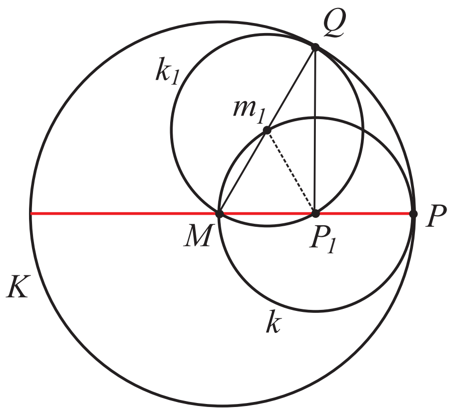
NZ-4 Mali krug k se okreće duž unutrašnjosti kruga K dva puta većeg prečnika (videti sliku 5). Koju putanju opisuje fiksirana tačka P na malom krugu?



Sl. 5 Putanja tačke na malom rotirajućem krugu?

Tačno rešenje prvi je poslao je Ivan Damnjanović, student Elektronskog fakulteta u Nišu i njemu pripada nagrada. Mada je Ivanovo rešenje elegantno i originalno, iz istorijskih razloga dajemo rešenje koje datira od pre 5 vekova (videti tekst rešenja).

REŠENJE: Tačka na malom krugu opisuje pravu liniju, kao što je pokazano na slici 6. Engleski pronalazač Metju Marej iskoristio je ovaj princip pretvaranja kružnog kretanja u pravolinijsko da 1802. godine konstruiše hipocikloidalnu parnu mašinu. Pomenimo da je ovo pravolinijsko kretanje bilo poznato najvećem matematičaru svoje epohe Italijanu Đerolamu Kardanu (1501–1576).



Sl. 6 Putanja periferne tačke

Dokažimo da se tačka P malog kotrljajućeg kruga kreće po prečniku velikog kruga. Posmatrajmo dva položaja k i k_1 manjeg kruga. Tačka P_1 na k_1 odgovara tački P na k gde manji krug k dodiruje veći krug K. Neka su M i m_1 redom centri krugova K i k_1 i neka je Q tačka dodira krugova K i k_1.

Neka je P tačka dodira između malog i velikog kruga u trenutku t_0, i neka je P_1 pozicija tačke P u trenutku t_1 posle kotrljanja malog kruga. Označimo sa Q tačku dodira u trenutku t_1. Dužina luka QP_1 kruga k_1 jednaka je dužini luka QP kruga K jer oba luka predstavljaju rastojanje „trasirano" u vremenskom periodu od t_0 do t_1. Dalje, kako je poluprečnik kruga k dva puta manji od poluprečnika kruga K, sledi da je $\measuredangle Qm_1P_1 = 2\measuredangle QMP$, i da centar M uvek leži na rotirajućem krugu. Odavde, na osnovu pravila da je periferijski ugao dva puta manji od centralnog ugla nad istom tetivom (u ovom slučaju QP_1), dobijamo da je $\measuredangle QMP_1 = \frac{1}{2}\measuredangle Qm_1P_1 = \measuredangle QMP$.

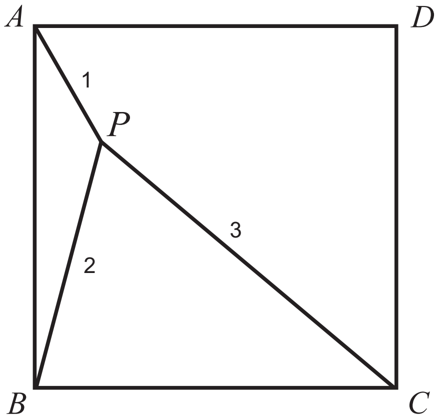
Prema tome, prava MP_1 se poklapa sa MP, što znači da se tačka P_1 kreće duž prave kroz MP za vreme kotrljanja manjeg kruga. Za vreme rotacije manjeg kruga fiksirana tačka na manjem krugu kreće se po prečniku većeg kruga („crveni trag").

ZADACI ZA REŠAVANJE

Z-65 • TEMPERATURE NA EKVATORU. Pokazati da na Ekvatoru postoje dve dijametralno suprotne tačke u kojima su temperature jednake.

Z-66 • LOKACIJA DREVNE PIRAMIDE. Dvojica arheologa nalaze se na poluostrvu Jukatan u Srednjoj Americi sa namerom da pronađu Drevnu piramidu boga Sunca koju su nekada davno sagradile Maje. Teren na kome se nalaze je ravan ali pokriven šumom tako da nemaju mogućnost za dobro osmatranje. Posle više dana uspeli su da dođu do Male piramide sa malom unutrašnom prostorijom P u koju su se sklonili od kiše. Na zidu ove prostorije pronašli su zapis na jeziku plemena Maja i posle dešifrovanja saznali su da je to putokaz za Drevnu piramidu opisan sledećim rečima:

Na ovom području nalaze se četiri piramide koje leže u temenima kvadrata. Najveća od njih je Drevna piramida. Piramida A udaljena je 1 km od Male piramide, piramida B, koja je susedna piramidi A i sa njom gradi pravac Jug-Sever, daleko je 2 km od Male piramide, a piramida C, koja leži istočno od piramide B, udaljena je 3 km od Male piramide (sl. 7). Drevna piramida boga Sunca nalazi se u četvrtom temenu D kvadrata.



Sl. 7 Potraga za Drevnom piramidom

Arheolozi su sa sobom imali GPS uređaj i kompas tako da su mogli da se kreću kroz šumu u željenom pravcu i da mere daljinu. Kada su sve podatke stavili na papir, zaključili su da je najveći problem što ne znaju koliko su susedne piramide udaljene jedna od druge, tj. kolika je stranica pomenutog kvadrata. Jedan od njih, nekada dobar matematičar naročito u oblasti geometrije, ipak je posle pola sata računanja i pravljenja skica došao do načina kako mogu da dođu do Drevne pitramide. Kako je to uradio arheolog?

REŠENJA ZADATAKA IZ PRETHODNOG SAJT-IZDANJA

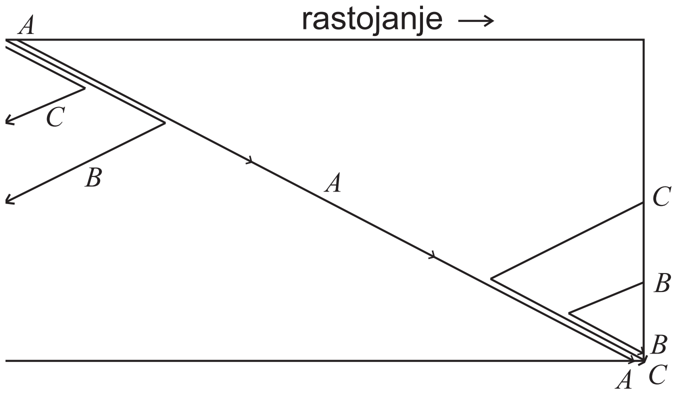
Z-63 • LET AVIONA OKO SVETA. Nekoliko aviona stacionirano je na jednom ostrvu koje se nalazi na Ekvatoru. Sa punim rezervoarom goriva avion može da obiđe polovinu Zemljine kugle bez spuštanja na zemlju. Pri snabdevanju u vazduhu iz rezervoara jednog aviona može se pretočiti proizvoljna količina goriva u rezervoar drugog aviona. Snabdevanje gorivom na zemlji moguće je jedino na ostrvu (bazi).

Koji je najmanji broj aviona koji mogu omogućiti let jednog aviona oko Zemljine kugle duž Ekvatora ako pretpostavimo da su brzina aviona i njihova potrošnja goriva jednake za sve avione? Osim toga, zahteva se da svi avioni imaju mogućnost da se vrate u bazu. Radi jednostavnosti, pri rešavanju zadatka pretpostaviti da se snabdevanje u vazduhu i na zemlji vrši trenutno, bez gubitka vremena.

REŠENJE: Da bi jedan avion obleteo oko Zemljine kugle po ekvatorskom krugu dovoljna su tri aviona. To se može učiniti na više načina. Mi ćemo izložiti postupak koji je najekonomičniji: snabdevanje gorivom vrši se samo pet puta, piloti dva snabdevačka aviona imaju vremena da pred uzletanje popiju kafu i pojedu sendvič, a sam postupak nije lišen prijatnosti simetrije.

S obzirom da se baza nalazi na Ekvatoru, bilo koja putanja oko Zemljine kugle jednaka je obimu kružnice najvećeg kruga (ekvatorskog kruga), ne uzimajući u obzir visinu na kojoj se leti. Označimo obim ovog kruga sa d. Osim toga, označimo sa q zalihu goriva u punom rezervoaru aviona.

Avioni A, B i C uzleću sa ostrva u istom trenutku. Posle pređenog puta od $d/8$ avion C predaje količinu goriva $q/4$ avionu A, i isto toliko avionu B. Preostala količina goriva dovoljna je avionu C da se vrati u bazu. Avioni A i B nastavljaju let preletevši još $d/8$, posle čega avion B predaje $q/4$ goriva u rezervoar aviona A. Rezervoar aviona B sadrži zalihu goriva od $q/2$, što je dovoljno da se avion B vrati u bazu.

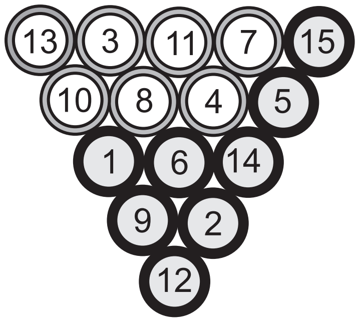


Sl. 8 Let aviona oko sveta

Sa punim rezervoarom avion A nastavlja put sve dok u njemu ima goriva. U tom momentu avion će se naći na rastojanju $d/4$ od cilja leta – ostrva. Na tom mestu presreće ga avion C koji je već ranije uzleteo sa ostrva, gde je u međuvremenu napunio svoj rezervoar. Avion C predaje količinu goriva od $q/4$ avionu A, a zatim zajedno nastavljaju put prema bazi. Na rastojanju $d/8$ od ostrva presreće ih avion B koji je nešto ranije poleteo iz baze sa punim rezervoarom. U momentu susreta rezervoari aviona A i C su prazni. Avion B predaje avionima A i C po $q/4$ goriva, pri čemu i njemu ostaje ova količina. Zaliha goriva od $q/4$ je upravo dovoljna da sva tri aviona pređu preostali deo puta $d/8$ do ostrva – baze.

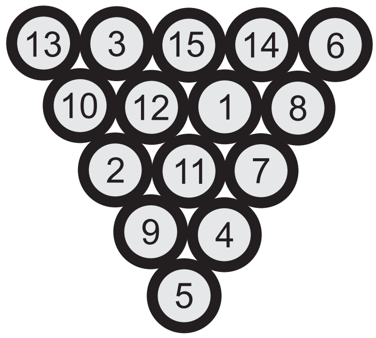
Čitav let tri aviona može se pregledno predstaviti pomoću dijagrama (sl. 8), gde je na horizontalnoj osi rastojanje, a na vertikali vreme leta. Desni i levi kraj dijagrama treba smatrati spojenim.

Z-64 • TROUGAO APSOLUTNIH RAZLIKA. Petnaest okruglih žetona iste veličine na kojima su napisani brojevi od 1 do 15 postavljeno je tako da formiraju trougao pomoću pet redova žetona kao na slici gore. Kaže se da je ovaj trougao reda 5. Primećujemo da u tri slučaja apsolutna vrednost razlike brojeva na susednim žetonima daje broj koji se nalazi ispod ovog para; naime, $|13-3|=10$, $|3-11|=8$, $|11-7|=4$, ali ne više. Zadatak se sastoji u tome da se svih 15 žetona rasporedi tako da svaki broj ispod para brojeva bude apsolutna vrednost razlike tih brojeva.



Zadatak je postavio Džordž Sikermen sa Državnog univerziteta Njujork u Bafalu, koji je dokazao da u slučaju trouglova reda 6 (brojevi od 1 do 21), reda 7 (brojevi od 1 do 28) i reda 8 (brojevi od 1 do 36) ne postoje rešenja, ali da trougao reda 5 ima jedinstveno rešenje.

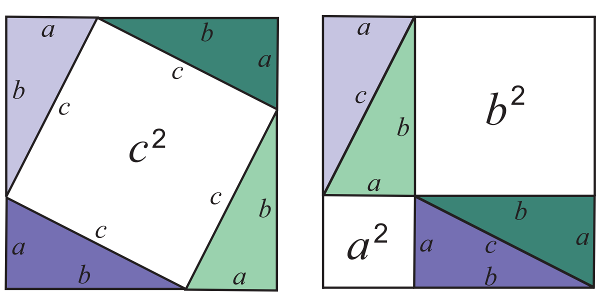
REŠENJE: Jedino rešenje (izuzimajući refleksiju) prikazano je na slici 9.



Sl. 9 Trougao apsolutnih razlika

MATEMATIČKE ZANIMLJIVOSTI

• **Pitagorine trojke.** Ako prirodni brojevi a, b i c predstavljaju stranice pravouglog trougla, tada za njih važi dobro poznata Pitagorina relacija $a^2 + b^2 = c^2$. Pitagorin dokaz dat je slici 10.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sl. 10 Pitagorin geometrijski dokaz

Odgovarajuće trojke prirodnih brojeva (a,b,c) se zovu *Pitagorine trojke.* Na primer, (3,4,5) i (5,12,13) su Pitagorine trojke. Ima beskonačno mnogo Pitagorinih trojki. Naime, ako je (a,b,c) jedna Pitagorina trojka, tada su i sve trojke (ka,kb,kc) takođe Pitagorine za proizvoljan prirodan broj k.

Iz Teorije brojeva poznato je da je broj Pitagorinih trojki beskonačan. Ako su m i n $(m>n)$ prirodni brojevi, tada se primitivne Pitagorine trojke (članovi trojke su uzajamno prosti brojevi) mogu generisati pomoću dvoparametarske formule

$$x=m^2-n^2, \quad y=2mn, \quad z=m^2+n^2.$$

Francuski matematičar Pjer Ferma (Pierre Fermat, 1601–1665) je 1643. postavio problem koji se sastoji u nalaženju Pitagorinih trojki $\{a,b,c\}$ takvih da hipotenuza c i zbir $(a+b)$ su oba kvadrati prirodnih brojeva. Tek nedavno uz pomoć računara pronađena su *najmanja* tri broja koja zadovoljavaju ove uslove:

$$\{a,b,c\}=\{4\,565\,486\,027\,761, 1\,061\,652\,293\,520, 4\,687\,298\,610\,289\}.$$

Vrlo je verovatno da Ferma nije imao rešenje problema.

• **Magični magični kvadrat.** Godine 1991, neposredno pre svoje smrti, Dejvid Kolison je konstruisao prvi magični kvadrat neparnog reda koji je dvostruko magičan: ne samo sume brojeva po horizontalama, vertikalama i dve glavne dijagonale su jednake i iznose 369, već ova osobina važi i kada se svaki broj magičnog kvadrata podigne na kvadrat (sl. 11). U ovom drugom slučaju suma je jednaka 20 049.

28	13	9	59	66	79	51	44	20
50	8	19	81	58	65	43	30	15
11	77	70	42	46	35	4	27	57
75	33	53	22	2	18	68	61	37
6	72	56	34	41	48	26	10	76
45	21	14	64	80	60	29	49	7
25	55	78	47	36	40	12	5	71
67	52	39	17	24	1	63	74	32
62	38	31	3	16	23	73	69	54

Sl. 11 Kolisonov dvostruko magičan kvadrat

• **Ponseleov naučni rad u ruskom zatvoru.** Veliki francuski matematičar Žan Viktor Ponsele (Jean Victor Poncelet, 1788–1867), član Akademije nauka, bio je inženjer-oficir u Napoleonovoj vojsci u ratu sa Rusijom. Za vreme katastrofalnog povlačenja iz Moskve novembra 1812, rasuta francuska vojska pod komandom maršala Nea pretrpela je strahovit poraz. Teško ranjen, Ponsele je ostao polumrtav na bojnom polju, ali ga je oficirska uniforma spasila. Doveden je u ruski vojni štab radi ispitivanja. Marta 1813. Ponsele je prebačen u zatvor u ruski grad Saratov na reci Volgi.

Ponsele je provodio turobne zatvorske dane, ali je našao zadovoljstvo radeći na novoj matematičkoj disciplini – projektivnoj geometriji. Radio je pod veoma teškim okolnostima. Prema priči, Ponsele je na početku imao samo parče ćumura kojim je crtao grafike po zatvorskim zidovima. Kada se vratio u Francusku novembra 1814, posle 18 meseci provedenih u zarobljeništvu, poneo je sa sobom sedam svezaka sa novim materijalom napisanim u zatvoru. Ovi rezultati bili su osnova Ponseleovog klasičnog rada *Applications d'analyse et de géometrie*, objavljenog 1822. godine, i veliki doprinos uspostavljanju i razvoju projektivne geometrije.

MATEMATIČKI HUMOR

• Na odmoru na moru matematičar je upoznao okeanografa koji se bavi istraživanjem brodskih olupina sa dna mora. Sedeći u kafiću na obali mora matematičar počinje da se hvali:

„Dokazao sam Goldbahovu hipotezu iz 1742. *godine koja pretpostavlja da se svaki paran prirodan broj može predstaviti kao zbir dva prosta broja."*

„A ja sam se baš ovih dana spustio batiskafom do dubine veće od 2000 metara i pronašao olupinu broda potonulog još pre 400 *godina, iz vremena gusara. I ne samo to, u kapetanovoj kabini pronašao sam sveću koja je još gorela,"* hvali se okeanograf.

„E, baš ga pretera! Daj smanji doživljaj, ja ću da priznam da sam proverio pomoću računara da Goldbahova hipoteza važi za sve parne brojeve od 2 *do milion, a ti ugasi sveću,"* predlaže matematičar obostrano vraćanje u realnost.

• *Mathematical Reviews* je veoma značajna publikacija Američkog matematičkog društva (AMS) u kojoj referenti-eksperti daju prikaze objavljenih naučnih radova iz matematike. Ponekad su ovde iznošena vrlo delikatna mišljenja i kritike. Ralf Boas je u jednom prikazu napisao: *„Ovaj rad daje netačne dokaze trivijalnih teorema. Osnovna greška, međutim, nije nova."* I još jedan komentar: *„U ovom radu ima puno toga što je* ***novo*** *i puno toga što je* ***tačno****. Nažalost, ono što je* ***tačno*** *nije* ***novo****, a ono što je* ***novo*** *nije* ***tačno****."*

• ***Kakve zvuke proizvodi matematičar koji se davi?***
log log log log log lo glo glo glo ...